



Titre: Adaptation de la méthode multi-unités à l'optimisation sous
Title: contraintes en présence d'unités non identiques

Auteur: Lyne Woodward
Author:

Date: 2009

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Woodward, L. (2009). Adaptation de la méthode multi-unités à l'optimisation sous
Citation: contraintes en présence d'unités non identiques [Thèse de doctorat, École
Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8464/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8464/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:**
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ADAPTATION DE LA MÉTHODE MULTI-UNITÉS À L'OPTIMISATION SOUS
CONTRAINTES EN PRÉSENCE D'UNITÉS NON IDENTIQUES

LYNE WOODWARD
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE CHIMIQUE)

AOÛT 2009



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-53808-1
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-53808-1

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

ADAPTATION DE LA MÉTHODE MULTI-UNITÉS À L'OPTIMISATION SOUS
CONTRAINTES EN PRÉSENCE D'UNITÉS NON IDENTIQUES

présentée par: WOODWARD Lyne

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. HENRY Olivier, Ph.D., président

M. SRINIVASAN Bala, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PERRIER Michel, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. GOURDEAU Richard, Ph.D., membre

M. BUDMAN Hector, Ph.D., membre

DÉDICACE

à Christophe, Élisabeth et Maxime

"On a toujours assez de temps quand on en fait un bon usage."

Johann Wolfgang von Goethe

REMERCIEMENTS

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans l'encouragement et le soutien de plusieurs personnes que je tiens sincèrement à remercier.

Tout d'abord, mon directeur de recherche, M. Bala Srinivasan homme de grand talent, pour sa très grande disponibilité, sa patience et son calme indéfectible dans les moments plus difficiles. Mon co-directeur de recherche M. Michel Perrier pour ses judicieux conseils et particulièrement pour m'avoir encouragée dans ma décision d'entreprendre ce doctorat.

M. Boris Tartakovski pour sa rigueur, sa compétence dont j'ai pu bénéficier et son enthousiasme face à mon projet lors de mes passages à l'Institut de Recherche en Biotechnologie.

Mme Michelle-France Manuel de l'IRB également pour avoir si gentiment collaboré en apportant une aide précieuse dans l'opération des piles à combustible. Merci également pour la relecture des articles et pour les agréables discussions à propos des aléas de la vie de famille. Je garde un agréable souvenir de mon passage à l'IRB.

M. Gregory DeCrescenzo pour avoir partagé son expérience contribuant ainsi à élargir mon champ de connaissances.

Le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie ainsi que l'École Polytechnique pour leur soutien financier.

Mes collègues de bureau, Moncef et Roberto, qui ont partagé de près les hauts et les bas de mon parcours doctoral. Ce fut un plaisir de vous côtoyer. Bertrand, Massi, Farhad, François et tous les étudiants de la Chaire qui savent créer une ambiance de convivialité dont il fait bon s'imprégner. Merci particulier à Agnès qui veille si bien à ce que chacun ne manque de rien.

Notre Mamie d'adoption, Olga, qui depuis bientôt 9 ans, prends soin de nos enfants avec un dévouement sans borne. Sans toi, je n'aurais jamais pu consacrer autant d'énergie à ce projet. Merci !

Jeanne pour tous les services rendus et tout particulièrement pour le condo ensoleillé qui m'a permis d'avancer cet ouvrage. Monique, pour les bons souvenirs de Bucarest. Marie-Marthe pour son écoute, sa présence et son courage dans les moments plus difficiles. Tu es un exemple de persévérance et de résilience pour moi. Roger, pour le goût du dépassement que tu nous as légué.

Tous mes parents et amis qui n'ont pas manqué de m'encourager dans cette aventure mais surtout qui me permettent de vivre des moments inoubliables remplis de sincérité.

Mes enfants, Christophe, Élisabeth et Maxime pour toute la fraîcheur et l'amour qu'ils m'apportent. La vie n'aurait pas le même sens sans vous.

Finalement, je ne peux terminer sans remercier du plus profond de mon coeur, Philippe, l'homme de ma vie qui me soutient dans mon parcours, particulièrement durant ces derniers mois, et avec qui il fait bon avancer dans la vie. Je t'aime !

RÉSUMÉ

L'optimisation en temps réel a pour objectif d'opérer un procédé de façon à optimiser un critère de performance en tout temps et ce, malgré les changements des conditions opératoires et les perturbations externes pouvant survenir. Pour ce faire, les mesures disponibles sont utilisées afin d'observer ces variations et de réagir en conséquence pour maintenir le procédé à son point d'opération optimal. La commande extrémale est une classe de méthodes d'optimisation en temps réel où le gradient estimé est commandé à zéro.

Les différentes méthodes de commande extrémale se distinguent par la façon dont le gradient est estimé. Dans la plupart de ces méthodes, une perturbation temporelle périodique connue est superposée à l'entrée du procédé et une séparation d'échelles de temps est nécessaire pour isoler les effets de la dynamique du système sur l'estimation du gradient. Cette séparation d'échelle de temps aura peu d'impact sur la vitesse de convergence pour des procédés à réponse rapide tels que la plupart des procédés mécaniques et électriques. Toutefois, la méthode de perturbations appliquée à des procédés plus lents tels que certains procédés chimiques ou biochimiques mènera à une convergence lente vers l'optimum.

La méthode d'optimisation multi-unités permet une convergence plus rapide dans de tels cas. Cette méthode requiert la présence d'unités identiques au sein du procédé à optimiser. Ces unités sont opérées à des valeurs d'entrées décalées par une perturbation de valeur constante. Le gradient est alors estimé par différences finies entre les sorties des unités. Comme la perturbation n'est pas temporelle, cette méthode converge plus rapidement.

L'hypothèse selon laquelle les unités du procédé à optimiser sont parfaitement identiques est rarement vérifiée en pratique. La première contribution de cette thèse consiste à étudier l'influence de différences entre les courbes statiques des unités d'un procédé sur la convergence de la méthode d'optimisation multi-unités. Bien

qu'il soit possible de faire un choix quant au signe de la perturbation introduite à l'entrée des unités pour assurer la stabilité de la méthode dans un tel cas, le point d'équilibre peut être très loin de l'optimum réel du procédé. Afin de contrer cette lacune, l'ajout de correcteurs adaptatifs à la méthode existante est proposé. Deux types d'adaptation sont présentés soit une adaptation séquentielle où la période d'optimisation est découplée de la période de correction et une adaptation simultanée où la correction se fait simultanément à l'évolution vers l'optimum. La stabilité locale de ces deux méthodes est démontrée. Il fut démontré que les différences entre les unités sont ainsi corrigées et que les unités convergent à leur optimum respectif.

Les méthodes de commande extrémale s'appliquent plus souvent à des problèmes d'optimisation sans contraintes. Typiquement les problèmes sous contraintes sont transformés en problèmes sans contraintes en utilisant une fonction barrière. L'utilisation d'une fonction barrière assure le respect des contraintes mais introduit une erreur de convergence par rapport au point optimal réel du procédé lorsque celui-ci se trouve sur la frontière de la région admissible. La méthode de projection du gradient sur les contraintes actives permet quant à elle d'être directement sur les contraintes actives ce qui se traduit par un gain en performance par rapport à celle obtenue avec la fonction barrière. Toutefois, le principal défi consiste à identifier l'ensemble des contraintes actives dans un contexte continu. Les méthodes existantes pour choisir l'ensemble de contraintes actives peuvent amener le procédé à rester coincé à un point d'opération sous-optimal. Une logique de choix des contraintes actives sans boucle infinie est proposée et une preuve de convergence de la commande extrémale avec projection du gradient sur l'ensemble des contraintes actives est fournie. La méthode d'optimisation multi-unités est utilisée avec la projection du gradient sur les contraintes actives.

La dernière partie de cette thèse présente les résultats expérimentaux de l'utilisation de la méthode multi-unités afin de maximiser la puissance électrique délivrée par deux piles à combustible microbiennes. Les piles à combustible microbiennes produisent de

l'électricité à partir d'eaux usées selon une réaction électro-chimique où les bactéries agissent comme catalyseur. Les correcteurs à adaptation séquentielle présentés dans cette thèse sont utilisés pour corriger les différences entre les piles. Les résultats de la méthode multi-unités sont comparés à ceux obtenus par l'utilisation de deux autres méthodes à perturbation temporelle soit la méthode de perturbation et observation et la méthode de la plus forte pente (méthode du gradient). Les réponses de ces trois méthodes à des perturbations du système sont également présentées. Les résultats expérimentaux obtenus confirment l'avantage principal de la méthode d'optimisation multi-unités comparativement aux méthodes à perturbation temporelle soit une plus grande vitesse de convergence vers l'optimum. Ces expériences confirment également que les différences entre les unités peuvent être corrigées et ainsi leur permettre d'atteindre leur optimum respectif.

ABSTRACT

Real-time optimization methods seek to keep a given process at its optimum operating conditions despite plant variations and external disturbances. This is achieved by identifying these variations using the available measurements, and thereby reacting to them. Among the different techniques available for real-time optimization, extremum-seeking methods are those where optimization is recast as a problem of controlling the gradient to zero.

The principle difference between the various extremum-seeking methods lie in the way the gradient is estimated. Most of these schemes involve injecting a periodic temporal perturbation signal and several time-scale separations are necessary to isolate the effects of the system dynamics on the estimated gradient. Time-scale separation will not be an issue for processes with fast responses, e.g. electrical or mechanical systems, though, for slower processes such as the chemical or biological ones, the convergence time could be prohibitive.

The multi-unit optimization is a recently proposed extremum-seeking method which provides faster convergence for slow dynamic processes. This method requires the presence of multiple identical units, with each of them operated at input values that differ by a pre-determined constant offset. The gradient is then estimated by finite differences between the outputs of the units. As the perturbation is not in the temporal domain, the convergence is faster.

The assumption of having identical units is indeed very strong and may not be realizable in practice. This thesis first studies the effects of the differences between the static characteristics on the stability and convergence of the standard multi-unit optimization scheme. It is shown that the choice of the offset parameter is crucial to stability, while the equilibrium point could be quite far away from the real optimum. To avoid such a situation, correctors which compensate for the differences between the units have been proposed. Two types of adaptation are analyzed : a sequential

approach where the multi-unit adaptation and the correction are done separately and a simultaneous approach where the two are performed together. Local stability of both approaches has been established. It was shown that the differences can indeed be corrected and both units would converge to their respective optima.

Extremum-seeking methods have traditionally been used for unconstrained problems. Typically, constrained problems have been transformed to unconstrained ones using barrier functions. Such an approach results in a loss of performance due to a gap between the equilibrium point and the set of active constraints. On the other hand, control of the gradient, projected on the set active constraints, would allow the equilibrium point to be directly on the active constraints. However, the main challenge is in the identification of the set of active constraints in a continuous framework. Existing methods have a problem of "jamming", i.e., being stuck at a non-optimal set of constraints. A new jamming-free switching logic is developed and a rigorous proof is provided to show that the system in fact converges to the optimum. The multi-unit optimization method is then coupled with the idea of gradient projection on the set of active constraints.

The last part of this thesis contains the experimental verification of the multi-unit optimization method for the maximum power point tracking of microbial fuel cells. Microbial fuel cells produce electricity from waste water through an electro-chemical reaction with bacteria acting as the catalyst. The sequential adaptation technique presented in this thesis is used to correct the difference between the cells. The results from multi-unit optimization are compared with two other traditional techniques that involve temporal perturbation, i.e., the perturbation/observation method and the steepest descent method. Also, different disturbances are introduced and the ability to track the optimum is observed. The experimental results confirm the main advantage of the multi-unit optimization method, i.e., a faster convergence to the optimum than methods using temporal perturbation. It also verifies the fact that differences between the units can be corrected leading each of them to their respective

optima.

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vii
ABSTRACT	x
TABLE DES MATIÈRES	xiii
Liste des figures	xvii
Liste des notations et des symboles	xxi
Liste des tableauxxxiii
Liste des annexes	xxiv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE	8
1.1 Formulation du problème d’optimisation	8
1.2 Classification des méthodes d’optimisation en temps réel	12
1.2.1 Optimisation en temps réel avec résolution numérique	16
1.2.1.1 Méthodes utilisant les mesures auxiliaires	18
1.2.1.2 Méthodes utilisant les mesures de la fonction objectif et des contraintes inégalité	26
1.2.2 Optimisation en temps réel par commande extrémale	30
1.2.2.1 Méthodes utilisant les mesures auxiliaires	31

1.2.2.2	Méthodes utilisant les mesures de la fonction objectif et des contraintes inégalité	37
1.3	Exemple illustratif: optimisation de la productivité de deux bioréac- teurs identiques	44
CHAPITRE 2 OPTIMISATION MULTI-UNITES EN PRÉSENCE D'UNITES NON IDENTIQUES		49
2.1	Effets de la présence d'unités non identiques sur les performances de la méthode d'optimisation multi-unités	50
2.1.1	Définition du problème: caractérisation des différences entre les unités	50
2.1.2	Équilibre de la méthode d'optimisation multi-unités en pré- sence d'unités non identiques	52
2.1.3	Stabilité de la méthode d'optimisation multi-unités en présence d'unités non identiques	54
2.1.4	Exemple illustratif	56
2.1.5	Optimisation multi-unités de deux bioréacteurs non identiques	60
2.2	Méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle	66
2.2.1	Introduction de correcteurs à adaptation séquentielle dans la méthode d'optimisation multi-unités	68
2.2.2	Équilibre de la méthode d'optimisation multi-unités avec cor- recteurs à adaptation séquentielle	69
2.2.3	Stabilité de la méthode d'optimisation multi-unités avec cor- recteurs à adaptation séquentielle	73
2.2.4	Optimisation de deux bioréacteurs non identiques par la mé- thode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adapta- tion séquentielle	74

2.3	Méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée	77
2.3.1	Introduction de correcteurs à adaptation simultanée dans la méthode d'optimisation multi-unités	77
2.3.2	Analyse de convergence de la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée	80
2.3.3	Optimisation de deux bioréacteurs non identiques par la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée	84
2.4	Conclusion	87

CHAPITRE 3 OPTIMISATION MULTI-UNITÉS SOUS CONTRAINTES: PROJECTION DU GRADIENT SUR LES CONTRAINTES ACTIVES

3.1	Principe de la projection du gradient sur les contraintes actives . . .	88
3.2	Logique de mise à jour sans boucle infinie	94
3.3	Analyse de stabilité de la commande extrémale avec projection du gradient	97
3.3.1	Analyse de la logique de mise à jour	97
3.3.2	Analyse de la commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives	103
3.4	Exemples pour illustrer la possibilité de boucles infinies	106
3.5	Optimisation multi-unités avec projection du gradient généralisée . .	110
3.6	Exemple: Optimisation multi-unités de la productivité trois réacteurs avec projection du gradient sur les contraintes actives	112
3.6.1	Méthode multi-unités et fonction barrière	113
3.6.2	Méthode d'optimisation multi-unités et projection du gradient	114
3.7	Conclusion	119

CHAPITRE 4	MAXIMISATION DE LA PUISSANCE PRODUITE PAR DES PILES À COMBUSTIBLES MICROBIENNES: RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX	120
4.1	La pile à combustible microbienne	120
4.2	Suivi du point maximal de puissance en temps réel	122
4.2.1	Formulation du problème d'optimisation	122
4.2.2	Méthodes utilisées	123
4.3	Matériaux et méthodes	127
4.4	Optimisation multi-unités de la puissance	128
4.4.1	Courbes de polarisation	128
4.4.2	Résultats expérimentaux	131
4.5	Comparaison des performances expérimentales de différentes méthodes d'optimisation	135
4.5.1	Convergence des méthodes utilisées	136
4.5.2	Suivi de l'optimum en présence de perturbations	138
4.5.3	Influence du temps d'adaptation sur les méthodes d'optimisation	142
4.6	Conclusion	147
	CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS	149
	BIBLIOGRAPHIE	155
	ANNEXES	164

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Structure générale des méthodes avec optimisation numérique	17
Figure 1.2	Structure générale des méthodes de commande extrémale . .	31
Figure 1.3	Structure de la méthodes des perturbations	40
Figure 1.4	Structure de la méthode multi-unités	43
Figure 1.5	Courbe statique des deux bioréacteurs identiques	45
Figure 1.6	Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs identiques selon la méthode multi-unités	47
Figure 1.7	Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs identiques selon la méthode de perturbation	47
Figure 2.1	Exemple de caractéristiques statiques différentes avec $\bar{J} = 0$.	52
Figure 2.2	Courbes statiques des deux bioréacteurs non identiques . . .	61
Figure 2.3	Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités: $\Delta = -5$ L/h	62
Figure 2.4	Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités: $\Delta = -1$ L/h	62
Figure 2.5	Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités: $\Delta = 5$ L/h	63
Figure 2.6	Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités: $\Delta = 1$ L/h	63
Figure 2.7	Valeurs optimales de productivité de protéines obtenues selon différentes valeurs de Δ	65
Figure 2.8	Structure de la méthode d'optimisation multi-unités avec cor- recteurs à adaptation séquentielle	67
Figure 2.9	Signaux de perturbations pour la méthode d'optimisation multi- unités avec correcteurs à adaptation séquentielle	68

Figure 2.10	Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle: évolution des entrées et sorties	75
Figure 2.11	Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle: évolution des correcteurs	75
Figure 2.12	Structure de la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée	78
Figure 2.13	Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée: évolution des entrées et sorties	85
Figure 2.14	Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée: évolution des correcteurs	86
Figure 3.1	La contrainte \tilde{S} doit être retirée de l'ensemble \tilde{S} si $\mu < 0$. . .	92
Figure 3.2	La contrainte \tilde{S} doit être remise dans l'ensemble \tilde{S} si $\dot{\tilde{S}}^{pred} > 0$. . .	93
Figure 3.3	Exemple 1: Évolution des contraintes	108
Figure 3.4	Exemple 2: Évolution des contraintes	109
Figure 3.5	Structure de la méthode d'optimisation multi-unités sous contraintes inégalité avec projection du gradient sur les contraintes actives	111
Figure 3.6	Résultats de la méthode d'optimisation multi-unités avec fonction barrière logarithmique	115
Figure 3.7	Résultats de la méthode d'optimisation multi-unités avec projection du gradient sur les contraintes actives	118
Figure 4.1	Schéma d'une pile à combustible microbienne	121
Figure 4.2	Montage expérimental des deux piles à combustible microbiennes	128
Figure 4.3	Courbes de polarisation des deux piles à combustible microbiennes	129

Figure 4.4	Variations de puissance obtenue sur la pile 1 suite à des changements de résistance A)pour des valeurs inférieures à la résistance interne B)pour des valeurs supérieures à la résistance interne	130
Figure 4.5	Résultat de l'optimisation multi-unités des deux MFC	133
Figure 4.6	Courbes de polarisation des deux piles à combustible microbiennes	136
Figure 4.7	Résultats de la méthode de perturbation/observation	137
Figure 4.8	Résultats de la méthode de la plus forte pente	137
Figure 4.9	Résultats de la méthode multi-unités	138
Figure 4.10	Réponse de la méthode perturbation/observation à un changement soudain de la concentration de substrat	139
Figure 4.11	Réponse de la méthode multi-unités à un changement soudain de la concentration de substrat	140
Figure 4.12	Réponse de la méthode perturbation/observation à une augmentation de la température	141
Figure 4.13	Réponse de la méthode multi-unités à une augmentation de la température	141
Figure 4.14	Réponse de la méthode Perturbation/observation avec une perturbation de 4 ohms	142
Figure 4.15	Réponse de la méthode P/O avec un délai de 30 secondes entre les perturbations	143
Figure 4.16	Réponse de la méthode P/O avec un délai de 10 secondes entre les perturbations	143
Figure 4.17	Réponse de la méthode P/O avec un délai de 5 secondes entre les perturbations	144
Figure 4.18	Réponse de la méthode multi-unités avec un délai de 30 secondes entre les perturbations	144

Figure 4.19	Réponse de la méthode multi-unités avec un délai de 10 secondes entre les perturbations	145
Figure 4.20	Réponse de la méthode multi-unités avec un délai de 5 secondes entre les perturbations	145

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$x(t)$:	Vecteur des variables d'état d'un système dynamique
$u(t)$:	Vecteur des entrées d'un système dynamique
J :	Index de performance ou fonction objectif
F :	Ensemble des contraintes égalité décrivant l'état de régime permanent
S :	Ensemble des contraintes inégalité
Δ :	Paramètre de perturbation constante de la méthode multi-unités
k :	Gain d'adaptation ou index d'itération (chapitre 1)
$\frac{\partial()}{\partial()}$:	Dérivée partielle
β :	Différence entre les points d'opération optimaux des unités
γ :	Différence entre les valeurs optimales des unités
$\hat{()}$:	Variable estimée
$\tilde{()}$:	Variable d'écart entre la variable estimée et sa valeur réelle
u_i^{opt} :	Point d'opération optimal réel de l'unité i
J_i^{opt} :	Valeur optimale réelle de l'unité i
$()^*$:	Point d'équilibre
θ :	Paramètres ajustables d'un modèle
λ :	Facteur d'oubli
$\dot{()}$:	Dérivée temporelle
\bar{S} :	Ensemble des contraintes actives
\hat{S} :	Ensemble des contraintes inactives
\tilde{S} :	Ensemble des contraintes actives que la logique de choix de contraintes souhaite retirer
P :	Matrice de projection sur les contraintes actives
M :	Matrice de gradients des contraintes actives
μ :	Multiplicateurs de Lagrange

$()^+$:	Matrice pseudo-inverse
Q :	Puissance électrique
V :	Volume d'un bioréacteur
E :	Tension électrique
R :	Résistance externe
q :	Débit volumique
W :	Chaleur de réaction
c_i :	Concentration molaire de l'espèce i

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Avantages et désavantages des catégories de méthodes d'optimisation en temps réel	13
Tableau 1.2	Méthodes avec résolution numérique	14
Tableau 1.3	Méthodes de commande extrémale	15
Tableau 2.1	Comparaison des performances obtenues avec différentes valeurs de Δ	64
Tableau 2.2	Temps de convergence de la méthode multi-unités avec correcteurs pour différentes valeurs de μ_{max} et $Y_{X/S}$ pour l'unité 2.	76
Tableau 3.1	Fonction objectif, contraintes et entrées des unités selon les différentes stratégies d'optimisation	119
Tableau 4.1	Valeurs moyennes de convergence des résistances externes . .	146
Tableau I.1	Valeurs des paramètres du bioréacteur	166
Tableau I.2	Paramètres d'ajustement de la méthode des perturbations . .	166
Tableau I.3	Paramètres d'ajustement et valeurs initiales utilisées pour la méthode multi-unités	166
Tableau III.1	Valeurs des paramètres du bioréacteur 2	169
Tableau IV.1	Paramètres d'ajustement de la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle	170
Tableau IV.2	Paramètres d'ajustement de la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée	170
Tableau V.1	Valeurs des paramètres et des conditions initiales	172
Tableau VI.1	Composition de la solution de carbone	174
Tableau VI.2	Composition de la solution de traces de métaux	174

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	DESCRIPTION DU MODÈLE DU BIORÉACTEUR UTILISÉ	164
ANNEXE II	EXPANSION EN SÉRIE DE TAYLOR DE $\sqrt{1-X}$	167
ANNEXE III	VALEURS UTILISÉS POUR SIMULER DEUX UNITÉS NON-IDENTIQUES	169
ANNEXE IV	PARAMÈTRES DE RÉGLAGE DE LA MÉTHODE MULTI-UNITÉS AVEC CORRECTEURS POUR L'EXEMPLE DES BIORÉACTEURS	170
ANNEXE V	DESCRIPTION DU MODÈLE DE RÉACTEUR UTILISÉ .	171
ANNEXE VI	DESCRIPTION DES MATÉRIAUX ET MÉTHODES UTILISÉS POUR LE MONTAGE DES MFC	173

INTRODUCTION

Contexte

Le développement technologique incessant que connaît le début du 21^{ème} siècle nous propulse dans un monde où la performance est un objectif de tout instant. Les procédés de transformation et de fabrication n'y échappent pas. Souvent, il ne s'agit plus de définir et d'ajuster des stratégies de commandes adéquates pour maintenir les entrées d'un procédé à des points de consigne désirés, mais plutôt d'opérer ces procédés de manière à optimiser un critère de performance donné tout en respectant des contraintes d'opération ou de conception. Ces objectifs de performance peuvent être de diminuer les coûts de production, minimiser des rejets pour respecter certaines normes environnementales ou augmenter la productivité d'un procédé. Les contraintes, quant à elles, peuvent être fixées par les capacités limites des équipements en cause, les normes de sécurité, d'environnement ou de qualité à respecter.

Le comportement des procédés est rarement stationnaire mais évolue plutôt dans le temps selon les différentes sources de perturbations externes qui peuvent exister. Dans un tel contexte, il n'existe pas un point d'opération minimisant le critère de performance d'un procédé qui demeure valide en tout temps. Les instruments de mesures d'un procédé nous permettent d'observer l'évolution d'un procédé dans le temps. L'optimisation en temps réel consiste à utiliser ces mesures pour identifier en tout temps le point d'opération permettant de minimiser le critère de performance. Des exemples d'application d'optimisation en temps réel se retrouvent dans la littérature que ce soit pour maximiser la pression d'un moteur (Vasu, 1957), pour augmenter le profit d'une usine (Van Wijk et Pope, 1992; Zhang et al., 1995; Chen et al., 1998) ou encore pour améliorer le contrôle des freins ABS (Drakunov et al., 1995).

Une étape primordiale et non-triviale dans la réalisation d'un projet d'optimisation en temps réel est de bien définir le problème dans le but de choisir la méthode adéquate parmi les différentes méthodes d'optimisation en temps réel existantes. Ces méthodes se distinguent les unes des autres selon différents critères fixés par la définition même de chaque problème :

- La dimension du problème est un des critères influençant le choix de la méthode à appliquer. Une méthode d'optimisation utilisant un modèle fondamental (Roberts, 1979) sera privilégiée pour les problèmes à grande dimension alors qu'une méthode utilisant seulement un modèle empirique (Wang et al., 1999) pourra être utilisée pour des problèmes comportant un nombre plus limité de variables manipulées.
- La connaissance *a priori* du procédé influenceront également la méthode à privilégier, celle-ci étant nécessaire pour utiliser une méthode avec modèle fondamental (Golden et Ydstie, 1989; Chen et Joseph, 1987; Guay et al., 2005).
- Le problème d'optimisation peut également différer d'un cas à un autre selon qu'il contienne ou non des contraintes inégalité. La méthode retenue devra alors tenir compte de ces contraintes inégalité le cas échéant (Dehaan et Guay, 2005; Marchetti et al., 2009; Tatjewski et al., 2001)
- Les mesures disponibles font aussi partie de la définition du problème d'optimisation. Le critère de performance et les contraintes sont-ils mesurés ou si seulement des mesures auxiliaires sont disponibles? Lorsque seules les mesures auxiliaires sont disponibles, une méthode utilisant un modèle fondamental (Guay et Zhang, 2003; Jang et al., 1987) est nécessaire alors que la mesure du critère de performance permet l'utilisation d'un modèle empirique seulement (Wellstead et Scotson, 1990).

Définition du problème

Le problème d'optimisation en temps réel à l'étude dans cette thèse est un problème de petite dimension, soit d'une dizaine de variables manipulées environ, où la fonction objectif est convexe et peut être évaluée en ligne à partir des mesures disponibles. De plus, la dynamique du système à l'étude est considérée lente. Le problème d'optimisation peut contenir ou non des contraintes inégalité et, le cas échéant, les mesures des contraintes sont également disponibles. Finalement, la connaissance *a priori* du procédé étant très limitée, l'utilisation d'un modèle fondamental dans la méthode d'optimisation en temps réel est considérée impossible.

Considérant cette définition de problème, une méthode de commande extrémale (Astrom et Wittenmark, 1995) sans modèle fondamental où le gradient estimé à partir de ces mesures est commandé à zéro constitue le cadre d'étude de la présente thèse.

Dans un tel contexte, la méthode de perturbations (Krstic et Wang, 2000) peut s'appliquer. Cette méthode consiste à superposer une perturbation temporelle périodique connue à l'entrée du procédé afin d'en observer l'effet sur le critère de performance. Une corrélation entre la mesure du critère de performance et cette perturbation permet d'estimer le gradient en régime permanent. Comme la perturbation utilisée est une perturbation temporelle, une bonne estimation du gradient en régime permanent nécessite différentes échelles de temps pour la fréquence de la perturbation, la fréquence de coupure des filtres et l'adaptation. Si cette méthode offre une bonne performance pour des procédés à réponse rapide, elle mène à une convergence très lente dans le cas de procédés à réponse lente.

Une autre possibilité serait d'utiliser un modèle empirique dynamique du critère de performance et d'utiliser les paramètres de ce modèle pour estimer le gradient statique (McFarlane et Bacon, 1989). L'utilisation d'un modèle dynamique permettrait alors d'éliminer la séparation d'échelles de temps et d'accélérer la convergence

vers l'optimum. Toutefois, l'estimation du gradient statique à partir d'un modèle dynamique engendrera une erreur de convergence.

La méthode d'optimisation multi-unités (Srinivasan, 2007) représente un deuxième choix possible dans le présent contexte. Cette méthode nécessite la présence d'unités identiques dans le procédé à optimiser. Par exemple, le procédé peut contenir plusieurs micro-réacteurs identiques ou encore, plusieurs cellules photovoltaïques. Cette fois, la perturbation utilisée n'est pas temporelle. Elle consiste plutôt en un écart constant imposé entre les valeurs d'entrées des unités. Le gradient est alors estimé par différences finies entre les mesures des critères de performance des unités. Puisque les unités sont identiques, l'estimation du gradient par différences finies permet d'éliminer l'effet de la dynamique sur ce gradient (statique). Toutefois, en pratique, l'hypothèse selon laquelle les unités du procédé sont identiques est rarement rencontrée ce qui limite grandement son application.

Lorsque le problème d'optimisation possède des contraintes inégalité, l'utilisation d'une fonction barrière permet de transformer le problème d'optimisation sous contraintes en un problème sans contraintes et de considérer une approche de commande extrême. L'utilisation d'une fonction barrière permet au procédé de se rapprocher de son optimum réel sans toutefois l'atteindre. Une autre façon d'utiliser une méthode de commande extrême en présence de contrainte inégalité est de commander le gradient projeté sur les contraintes actives à zéro. Ainsi, l'optimum peut être réellement atteint ce qui permet un gain en performance par rapport à l'utilisation de fonctions barrière. Le principal défi d'effectuer une projection du gradient sur les contraintes actives réside en l'identification en temps réel de l'ensemble des contraintes actives.

Objectifs principaux

Cette thèse a deux objectifs principaux. Le premier vise à étudier l'effet qu'auront les différences entre les unités d'un procédé sur la convergence de la méthode d'optimi-

sation multi-unités. Le second objectif est de développer une méthode d'optimisation en temps réel sans modèle utilisant une projection du gradient sur les contraintes actives.

Objectifs spécifiques

Les objectifs spécifiques relatifs au premier objectif principal sont :

1. De déterminer l'effet qu'auront des unités semblables, mais non identiques, sur la convergence de la méthode d'optimisation multi-unités.
2. De déterminer un algorithme d'optimisation utilisant le principe des unités multiples dans le cas d'unités semblables, mais non identiques.
3. De comparer le temps nécessaire pour atteindre le point d'opération optimal avec les techniques utilisant une source de perturbation temporelle.
4. De prouver la stabilité de l'algorithme multi-unités avec unités semblables, mais non identiques.

Les objectifs spécifiques relatifs au second objectif principal sont :

1. De déterminer une façon d'identifier l'ensemble des contraintes actives par l'utilisation des mesures disponibles.
2. De déterminer un algorithme d'optimisation utilisant la projection du gradient sur les contraintes actives.
3. De comparer la valeur optimale de la fonction objectif obtenue avec celle obtenue par l'utilisation de la fonction barrière.
4. De prouver la stabilité de l'algorithme d'optimisation utilisant la projection du gradient sur les contraintes actives.

Organisation de la thèse

Le chapitre 1 dresse une brève revue de la littérature dans le domaine de l'optimisation en temps réel. Le chapitre 2 traite de l'application de la méthode multi-unités à des procédés contenant des unités similaires, mais dont les caractéristiques statiques ne sont pas parfaitement identiques. Les effets de ces différences sur la convergence de la méthode sont énoncés. Une amélioration à la méthode existante dans de tels cas est également proposée. Le chapitre 3 traite de la commande extrémale sous contraintes inégalités. Les contraintes inégalités sont prises en compte par l'utilisation du principe de gradient projeté sur les contraintes actives dans une structure de commande extrémale sans modèle. Le chapitre 4 contient les résultats expérimentaux de l'application de la méthode multi-unités à l'optimisation de la puissance électrique délivrée par un système composé de deux piles à combustibles microbiennes similaires. Ces résultats sont également comparés aux résultats obtenus à l'aide de méthodes plus traditionnelles telles que la méthode de perturbation et observation et la méthode du gradient. Finalement, les conclusions et recommandations font l'objet du chapitre 5.

Contributions

Les principales contributions de cette thèse ont été identifiées comme suit :

1. Une analyse des limites de stabilité et des effets sur le point d'équilibre de la méthode d'optimisation multi-unités existante lorsqu'elle est appliquée à des procédés dont les unités présentent des courbes statiques différentes.
2. Une méthode d'optimisation multi-unités améliorée pouvant optimiser un plus grand nombre de procédés soit ceux dont les unités présentent des courbes statiques différentes.
3. Un algorithme capable d'identifier l'ensemble des contraintes actives dans un contexte continu en un nombre fini d'itérations permettant d'appliquer la com-

mande extrême avec projection du gradient sur les contraintes actives.

4. Des résultats expérimentaux démontrant la capacité de la méthode d'optimisation multi-unités améliorée de maximiser la puissance électrique délivrée par des piles à combustible microbiennes semblables.

CHAPITRE 1

REVUE DE LITTÉRATURE

1.1 Formulation du problème d'optimisation

Considérons un procédé opéré à des valeurs d'entrées $u(t)$ pour lequel certaines mesures $Y(t)$ sont disponibles. Si le procédé répond instantanément aux variations d'entrée, il peut être considéré comme statique et son comportement peut alors être décrit par la relation suivante :

$$Y(t) = h(u(t)) \quad (1.1)$$

En réalité, la plupart des procédés possèdent une dynamique : leur état à un instant t donné ne dépend pas uniquement des entrées à cet instant mais également des entrées aux instants antérieurs. Ainsi, l'historique d'un procédé dynamique à un instant donné peut être décrit par les équations suivantes :

$$\dot{x} = F(u(t), x(t)) \quad (1.2)$$

$$Y(t) = H(u(t), x(t)) \quad (1.3)$$

où $x(t)$ représente le vecteur des états du système. Un système dynamique est considéré en régime permanent lorsque $\dot{x} = 0$ et son comportement peut alors être décrit par l'équation (1.1).

Les procédés peuvent être opérés de façon continue ou discontinue. Ces deux types

de conditions opératoires se distinguent selon différents critères. Tout d'abord les procédés continus possèdent un régime permanent alors que les procédés discontinus n'en n'ont pas. Ces derniers sont plutôt de nature irréversible : une fois certaines limites franchies, aucune commande ne peut ramener un système discontinu à son état précédent (Bonvin, 1998). Finalement, chaque lot a une durée d'opération finie alors que les procédés continus n'en n'ont pas.

Dans un contexte d'optimisation des procédés, le critère de performance et les contraintes des procédés en lot peuvent être composés d'une partie associée aux trajectoires et d'une partie associée au temps final du lot. Les problèmes d'optimisation de procédés discontinus sont des problèmes de nature dynamique (Bryson et Ho, 1975) pouvant se formuler comme suit :

$$\min_u J = \Phi_f(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (\Phi_t(u(t), x(t), t)) dt \quad (1.4)$$

$$(1.5)$$

où t_f est le temps final du lot et J le critère de performance devant être minimisé.

Pour les procédés continus, comme le temps final n'est pas défini, le problème d'optimisation est plus souvent considéré en régime permanent : le critère de performance est fonction des valeurs des différentes variables en régime permanent. Cette thèse s'intéresse à l'optimisation de procédés dynamiques continus et les différentes méthodes d'optimisation en temps réel présentées font référence au problème d'optimisation statique défini comme suit :

$$\begin{aligned}
\min_u J &= \Phi(u, x) \\
s.t. \quad &F(u, x) = 0 \\
&S(u, x) \leq 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

où J représente le critère de performance devant être minimisé et S , l'ensemble des contraintes inégalité à respecter. Ainsi, les valeurs des entrées optimales u^* minimisant la fonction J du problème (1.6) sont valides en régime permanent.

Bien que le problème (1.6) soit un problème sous contraintes inégalité, il peut être transformé en un problème sans contraintes par l'utilisation d'une fonction barrière (Vassiliadis et Floudas, 1997). Il prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\min_u J_B &= \Phi(u, x) - \zeta \sum_i \log(-(S_i(u, x))) \\
s.t. \quad &F(u, x) = 0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

La pénalité logarithmique associée aux contraintes inégalité assure que la solution de ce problème ne franchisse pas la frontière de la région admissible définie par ces contraintes inégalité. La distance entre la solution du problème (1.7) et la frontière de la région admissible sera plus ou moins grande selon la valeur du paramètre de réglage ζ .

Les équations (1.2-1.3) reliant les entrées u aux sorties Y d'un procédé sont rarement connues de façon exactes mais sont plutôt approximées par un modèle qui a la forme

suivante :

$$\dot{x}_m = F_m(u(t), x_m(t), \alpha, \theta) \quad (1.8)$$

$$Y_m(t) = H_m(u(t), x_m(t), \alpha, \theta) \quad (1.9)$$

où α et θ représentent les vecteurs des paramètres fixes et ajustables du modèle respectivement.

Ainsi, le problème d'optimisation à résoudre est défini selon ce modèle et devient alors :

$$\begin{aligned} \min_u J_m &= \Phi_m(u, x_m, \alpha, \theta) & (1.10) \\ \text{s.t.} \quad & F_m(u, x_m, \alpha, \theta) = 0 \\ & S_m(u, x_m, \alpha, \theta) \leq 0 \end{aligned}$$

Le modèle utilisé dans l'énoncé du problème d'optimisation peut prendre la forme d'un modèle fondamental élaboré à partir des lois fondamentales de la physique ou celui d'un modèle empirique de type "boîte noire" qui tente de reproduire localement le comportement du procédé. Le problème d'optimisation (1.10) peut utiliser l'un ou l'autre type de modèle ou même les deux à la fois. De façon générale, les différentes fonctions du problème (1.10) peuvent être détaillées comme suit :

$$\Phi_m(u, x_m, \alpha, \theta) = \Phi_p(u, x_m, \alpha, \theta_p) + \Phi_b(u, x_m, \alpha, \theta_b) \quad (1.11)$$

$$F_m(u, x_m, \alpha, \theta) = F_p(u, x_m, \alpha, \theta_p) + F_b(u, x_m, \alpha, \theta_b) \quad (1.12)$$

$$S_m(u, x_m, \alpha, \theta) = S_p(u, x_m, \alpha, \theta_p) + S_b(u, x_m, \alpha, \theta_b) \quad (1.13)$$

où les indices p et b représentent les fonctions et paramètres associés aux modèles fondamentaux et empiriques respectivement.

Rien n'assure que la solution du problème (1.10) nous amène à l'optimum réel du procédé, solution du problème (1.6). Il existe différentes raisons expliquant la possibilité d'une erreur entre les solutions de ces deux problèmes. L'incertitude du modèle, l'effet sur l'optimum réel de perturbations exogènes ne faisant pas partie des mesures disponibles et le changement dans le temps de la fonction F décrivant la dynamique du procédé sont autant de facteurs favorisant l'erreur sur la solution du problème (1.10). Afin que la solution identifiée se rapproche le plus possible du point d'opération optimal réel, le modèle doit être une représentation adéquate du procédé réel à tout instant : les paramètres θ sont alors ajustés régulièrement pour que les sorties du modèle Y_m correspondent le plus fidèlement possible aux mesures Y du procédé. Toutefois, comme nous pourrions le constater dans ce chapitre, une bonne identification des paramètres du modèle ne signifie pas que l'optimum de ce modèle correspondra à celui du procédé réel.

1.2 Classification des méthodes d'optimisation en temps réel

Les différentes méthodes d'optimisation en temps réel peuvent être regroupées en deux catégories selon la façon dont le problème (1.10) est résolu. La première caté-

gorie regroupe les méthodes où le point d'opération optimal u^* est obtenu en résolvant numériquement le problème (1.10). Ces méthodes effectuent la mise à jour des paramètres du modèle et le calcul du point d'opération optimal de façon séquentielle. Les méthodes de cette catégorie se distinguent par la façon de mettre à jour les paramètres du modèle selon la nature des mesures disponibles. Nous distinguerons ici, les mesures du critère de performance J et des contraintes inégalités S des autres mesures disponibles que nous désignerons mesures auxiliaires.

L'autre catégorie de méthodes d'optimisation en temps réel est souvent désignée dans la littérature sous l'appellation "commande extrême". Elle regroupe les méthodes où les conditions d'optimalité du problème (1.10) sont utilisées pour le suivi du point optimal en temps réel. Ainsi, le modèle est utilisé pour estimer le gradient $\frac{\partial J_m}{\partial u}$ et parfois le Hessien $\frac{\partial^2 J_m}{\partial u^2}$. Le problème d'optimisation est alors converti en un problème de commande où l'information obtenue à l'aide du modèle est utilisée pour déterminer la loi de commande permettant au système d'évoluer vers l'optimum. Ces méthodes se distinguent entre elles par la façon dont le gradient et le Hessien sont estimés selon le type de mesures disponibles.

Le tableau 1.1 dresse une liste des avantages et désavantages de ces deux catégories de méthodes d'optimisation en temps réel.

Tableau 1.1 Avantages et désavantages des catégories de méthodes d'optimisation en temps réel

	Résolution numérique	Commande extrême
Avantages	<ul style="list-style-type: none"> - Convergence rapide - S'applique aux problèmes à grande dimension 	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne précision - Boucle rétro-active filtre le bruit de mesure - Modèle local = pas d'extrapolation de u^*
Désavantages	<ul style="list-style-type: none"> - Mauvaise précision - Identification des paramètres du modèle affectée par le bruit de mesures 	<ul style="list-style-type: none"> - Convergence lente - Difficilement applicable pour les problèmes de grande dimension

Les modèles utilisés par les principales méthodes d'optimisation en temps réel sont identifiés dans les tableaux (1.2) et (1.3). Nous y distinguons les modèles fondamentaux (ϕ_p , F_p et S_p) des modèles empiriques (ϕ_b , F_b et S_b). Ces tableaux indiquent quelles sont les composantes des équations générales (1.11-1.13) qui apparaissent dans le problème adressé par chacune des méthodes ainsi que le type de paramètres utilisés (α lorsque le modèle fondamental ne contient que des paramètres fixes et θ lorsqu'il contient certains paramètres ajustables). Les méthodes utilisant des modèles fondamentaux dont les paramètres sont fixes (Golden et Ydstie, 1989; Desbiens et Shook, 2003; Marchetti et al., 2009; Bamberger et Isermann, 1978; Garcia et Morari, 1981) nécessitent un modèle empirique pour corriger l'erreur modèle fondamental-procédé.

Tableau 1.2 Méthodes avec résolution numérique

	Modèle fondamental			Modèle empirique				Mesures disponibles
	Φ_p	F_p	S_p	Φ_b	F_b	S_b	Modèle	
Jang et al. (1987) Chen et Joseph (1987)	θ_p	θ_p	θ_p					Y_{aux}
Roberts (1979) Roberts et Williams (1981)	θ_p	θ_p	θ_p	θ_b			Statique linéaire	Y_{aux}
Tatjewski et al. (2001)	θ_p	θ_p	θ_p	θ_b		θ_b	Statique linéaire	Y_{aux}
Golden et Ydstie (1989)	α	α			θ_b		Dynamique quadratique	Y_{aux}
Wellstead et Scotson (1990)				θ_b			Statique quadratique	J
Desbiens et Shook (2003) Marchetti et al. (2009)	α	α	α	θ_b		θ_b	Statique linéaire	J,S

Dans ce chapitre, les principaux travaux traitant de l'optimisation en temps réel sont

Tableau 1.3 Méthodes de commande extrême

	Modèle fondamental			Modèle empirique			Mesures disponibles
	Φ_p	F_p	S_p	Φ_b	F_b	S_b	
Guay et Zhang (2003)	θ_p	θ_p					Y_{aux}
Bamberger et Isermann (1978)	α				θ_b		Dynamique quadratique Y_{aux}
Garcia et Morari (1981)	α				θ_b		Dynamique linéaire Y_{aux}
McFarlane et Bacon (1989)				θ_b		θ_b	Dynamique linéaire J
Krstic et Wang (2000) Leblanc (1922)				θ_b			Statique linéaire J
Srinivasan (2007)				θ_b			Statique linéaire J

présentés selon leur appartenance à l'une ou l'autre de ces 2 catégories.

1.2.1 Optimisation en temps réel avec résolution numérique

Dans le domaine de l'ingénierie, les algorithmes numériques de résolution de problèmes d'optimisation peuvent être utilisées pour améliorer la conception des procédés (Reklaitis et al., 1983) ou encore pour améliorer leur performance opérationnelle (Cutler et Perry, 1983). Dans les deux cas, la résolution des problèmes d'optimisation par l'utilisation d'algorithmes numériques ne peut se faire sans l'utilisation d'un modèle du procédé.

Comme la performance d'un procédé peut être affectée par différentes sources d'incertitude (Zhang et al., 2002), une solution identifiée par la résolution numérique du problème d'optimisation défini par un modèle à un instant donné ne sera pas nécessairement valide à un temps ultérieur. L'optimisation en temps réel doit permettre d'identifier et de suivre la solution optimale à tout instant, peu importe les perturbations pouvant survenir au sein du procédé.

Le suivi du point d'opération optimal en temps réel nécessite une mise à jour du modèle utilisé pour l'optimisation ainsi qu'un calcul fréquent de ce point optimal. La structure générale de l'optimisation en temps réel avec résolution numérique est présentée à la Figure 1.

Chaque itération k des méthodes avec résolution numérique consiste à effectuer les deux étapes suivantes (Marlin et Hrymak, 1997; Dormer et Raynor, 1998) :

Étape d'identification : appliquer les entrées $u(k)$ au procédé et obtenir les mesures en régime permanent Y . Déterminer les paramètres $\hat{\theta}^*(k)$ du modèle qui

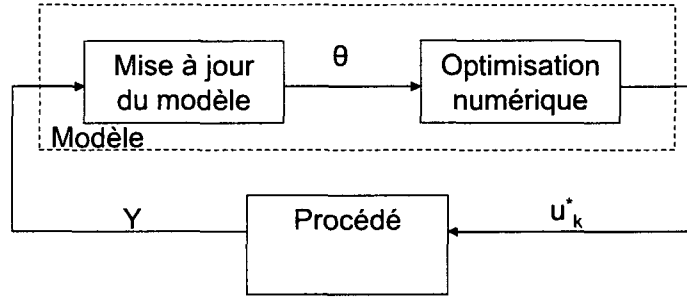


Figure 1.1 Structure générale des méthodes avec optimisation numérique

minimisent le problème d'estimation au sens des moindres carrés suivant :

$$\min_{\hat{\theta}} G(u(k), x, Y, \hat{\theta}) = \sum \omega_i (Y_i - H_{m,i}(u(k), x, \alpha, \hat{\theta}))^2 \quad (1.14)$$

Étape d'optimisation : avec les paramètres $\hat{\theta}^*(k)$ trouvés à l'étape d'identification, identifier le point d'opération optimal $u(k+1) = u^*$ à appliquer au procédé en résolvant numériquement le problème d'optimisation (1.10)

La nature des mesures disponibles détermine la nature des éléments mis à jour (θ). Lorsque seules des mesures auxiliaires sont disponibles, un modèle fondamental comportant des paramètres θ_p ajustables est nécessaire. Les méthodes dont la mise à jour ne vise que les paramètres θ_b nécessitent quant à elles que les valeurs de J et S puissent être évaluées directement à partir des mesures disponibles. Nous traiterons maintenant des principales méthodes de cette catégorie selon le type de mesures qu'elles utilisent soit i) les mesures auxiliaires et ii) les mesures de J et S .

1.2.1.1 Méthodes utilisant les mesures auxiliaires

La méthode communément appelée dans la littérature "approche deux phases" fut introduite par Jang et al. (1987). Bien qu'elle fut tout d'abord définie pour un problème d'optimisation dynamique avec un horizon de temps fini glissant, elle fut également utilisée pour résoudre un problème d'optimisation statique tel que celui décrit par l'équation (1.6) (Chen et Joseph, 1987). Cette méthode consiste à utiliser uniquement un modèle fondamental du procédé avec paramètres fixes et ajustables pour le calcul numérique du point d'opération optimal.

Ici, les mesures de J et de S ne sont pas disponibles et seules les mesures auxiliaires sont utilisées lors de la phase d'identification pour mettre à jour les paramètres θ_p du modèle suivant :

$$Y_p = H_p(u, x_m, \alpha, \theta_p) \quad (1.15)$$

L'étape d'optimisation consiste à résoudre numériquement le problème (1.10) qui ne contient ici que la partie définie par le modèle fondamental :

$$\begin{aligned} \min_u \quad & \Phi_p(u, x_m, \alpha, \theta_p) \\ \text{s.t.} \quad & F_p(u, x_m, \alpha, \theta_p) = 0 \\ & S_p(u, x_m, \alpha, \theta_p) \leq 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Même si la phase d'identification du modèle permet de trouver des valeurs de θ_p minimisant l'erreur entre les sorties du modèle Y_p et les mesures auxiliaires Y , rien n'assure que l'optimum trouvé par la résolution du problème (1.16) correspondra à

celui du procédé réel, i.e. la solution du problème (1.6).

Dès 1965, Durbeck (1965) s'est intéressé à l'erreur de convergence engendrée par l'utilisation d'un modèle fondamental dans le calcul numérique d'une commande optimisante pour un procédé. Il a démontré qu'il y aura coïncidence entre l'optimum du modèle et celui du procédé seulement si les conditions de Karush-Kuhn Tucker (Edgar et Himmelblau, 1988) sont respectées i.e., s'il y a correspondance des gradients du modèle et ceux du procédé. Ainsi, pour que l'optimum identifié à l'aide du modèle corresponde à l'optimum réel du procédé, il ne suffit pas que les sorties du modèle correspondent aux sorties du procédé mais l'ajustement des paramètres doit permettre aux conditions de KKT du problème (1.10) de correspondre à celles du problème (1.6).

D'autres études ont également porté sur les critères requis pour qu'un modèle puisse identifier adéquatement l'optimum réel du procédé. Biegler et al. (1985) s'est intéressé à des cas de simulation de procédés à grande dimension utilisant une boucle interne avec des modèles approximés et une boucle externe avec un modèle rigoureux du procédé. Les modèles approximés sont utilisés pour modéliser des parties du modèle rigoureux plus difficiles à calculer ce qui permet de réduire la complexité du calcul. Les modèles approximés sont solutionnés dans la boucle interne et le contrôle est ensuite retourné à la boucle externe où les paramètres des modèles approximés sont mis à jour en faisant correspondre les propriétés des modèles approximés à ceux du modèle rigoureux. Cette approche est similaire à l'optimisation en temps réel avec résolution numérique où le modèle rigoureux est le procédé, la boucle interne représente l'étape d'optimisation à l'aide du modèle et la boucle externe constitue l'étape d'identification des paramètres du modèle.

Dans un contexte d'optimisation en temps réel, sous les hypothèses suivantes :

- toutes les variables du procédé sont incluses dans le modèle ;

- les contraintes d'opération sont représentées par les mêmes équations tant pour le modèle que pour le procédé ;
- le modèle possède le même nombre d'équations que le procédé ;
- le problème d'optimisation utilisant le modèle et le problème réel (utilisant le procédé) ont les mêmes multiplicateurs KKT.

L'optimum calculé à l'aide du modèle pourra correspondre à celui du procédé seulement s'il existe des valeurs des paramètres θ_p permettant aux gradients du modèle (par rapport aux variables de procédé) et aux gradients du procédé de correspondre.

Toutefois comme le soulignent Forbes et al. (1994), habituellement un modèle n'est qu'une approximation du procédé réel et il est rare qu'il contienne toutes les variables. La méthode plus générale proposée par Forbes pour déterminer s'il y aura coïncidence entre l'optimum du modèle et celui du procédé utilise le concept d'espace réduit. Ainsi, l'espace du problème original est réduit en utilisant les contraintes égalité et les contraintes inégalité actives pour éliminer certaines variables dans le problème d'origine. Si les contraintes inégalité actives \bar{S}_m sont connues, l'ensemble des contraintes actives peut être représenté par :

$$g_m(u, x_m, \alpha, \theta) = \begin{bmatrix} F_m(u, x_m, \alpha, \theta) \\ \bar{S}_m(u, x_m, \alpha, \theta) \end{bmatrix} = 0$$

Selon les méthodes de Gill et Wright (1981), le noyau du Jacobien de l'ensemble des contraintes actives peut être défini par :

$$[\nabla_u g_m \quad \nabla_{x_m} g_m]Z = 0 \tag{1.17}$$

où Z est l'ensemble des bases définissant le noyau du Jacobien des contraintes. Ainsi, le gradient réduit de la fonction objectif J_m du problème (1.10) est donné par :

$$\nabla_r J_m = [\nabla_u J_m \quad \nabla_{x_m} J_m] Z \quad (1.18)$$

et le Hessien réduit de cette même fonction objectif est :

$$\nabla_r^2 J_m = Z^T \begin{bmatrix} \nabla_u^2 L_m & \nabla_{u,x_m}^2 L_m \\ \nabla_{u,x_m}^2 L_m & \nabla_{x_m}^2 L_m \end{bmatrix} Z$$

où L_m est le Lagrangien du problème (1.10) tel que $L_M = J_m + \mu^T g_m$ où μ représente les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes actives.

Les conditions suffisantes pour avoir un minimum peuvent s'exprimer en terme d'espace réduit :

$$\nabla_r J_m = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_r^2 J_m \quad \text{définie positive}$$

Forbes et al. (1994) utilisent ce principe d'espace réduit pour définir le critère à respecter assurant que l'optimum du modèle coïncide à celui du procédé :

Si u^* est un minimum unique du procédé et qu'il existe au moins un ensemble de

valeurs des paramètres θ tels que

$$\nabla_r J_m \Big|_{u^*} = 0 \quad (1.19)$$

$$u^T \nabla_r^2 J_m \Big|_{u^*} u \geq 0 \quad (1.20)$$

$$u^T \nabla_r^2 J \Big|_{u^*} u > 0 \quad (1.21)$$

alors l'optimum du modèle coïncidera à l'optimum du procédé. L'avantage principal de définir ce critère de modèle adéquat en utilisant le principe d'espace réduit est que seulement les variables manipulées déterminant la localisation de l'optimum du procédé sont considérées.

Bien que ces analyses aident à mieux comprendre l'erreur de convergence que peut présenter l'approche 2 phases, rien n'assure que cette erreur ne puisse être évitée lorsque seul un modèle fondamental est utilisé : la mise à jour des paramètres θ_p n'assure pas que l'optimum réel du procédé puisse être trouvé.

Plusieurs travaux ont porté sur l'amélioration de l'approche deux phases afin de tenir compte de l'erreur de modélisation explicitement et d'en diminuer l'effet sur la convergence. Roberts (1979) suggère d'ajouter un modèle empirique au modèle fondamental en introduisant un terme de correction dans la fonction objectif de façon à compenser l'écart entre les gradients du procédé et du modèle. Le problème d'optimisation devient :

$$\begin{aligned} \min_u \quad & \Phi_p(u, x_m, \alpha, \theta_p) + \Phi_b(u, \theta_b) \\ \text{s.t.} \quad & F_p(u, x_m, \alpha, \theta_p) = 0 \\ & S_p(u, x_m, \alpha, \theta_p) \leq 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

avec

$$\begin{aligned}\Phi_b(u, \theta_b) &= -\theta_{b1}u \\ \theta_{b1} &= \left(\frac{\partial Y_p}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial Y_p}{\partial \theta_p} \right)^{-1} \frac{\partial \Phi_p}{\partial \theta_p}\end{aligned}\quad (1.23)$$

Le terme de correction est une approximation du premier ordre de l'erreur entre le modèle fondamental et le procédé. Ainsi, les paramètres θ_p et θ_b sont mis à jour à chaque cycle d'identification-optimisation. Cette idée constitue la base de la méthode ISOPE (Integrated System Optimization and Parameter Estimation) (Brdys et Tatjewski, 2005).

La valeur de $\frac{\partial Y}{\partial u}$ est obtenue expérimentalement en perturbant chacune des entrées de u à partir du régime permanent.

Chaque cycle k de la méthode ISOPE consiste donc à effectuer les étapes suivantes :

1. Obtenir les mesures auxiliaires du procédé au point $u(k)$. Perturber chacune des entrées pour estimer les gradients $\frac{\partial Y}{\partial u}$ au point d'opération $u(k)$ nécessaires à la mise à jour de $\theta_{b1}(k)$.
2. Identifier les paramètres $\theta_p(k)$ du modèle en résolvant le problème (1.14) avec $Y_m = Y_p$.
3. Résoudre le problème d'optimisation (1.22) et appliquer $u(k+1) = u^*$ au procédé

L'introduction d'un terme de correction dans le problème d'optimisation permet de compenser l'incertitude du modèle fondamental mais la nécessité d'obtenir le gradient $\frac{\partial Y}{\partial u}$ à chaque cycle d'optimisation vient ralentir la convergence de cette méthode dans le cas notamment des procédés à réponse lente.

La mise à jour du modèle peut se faire également par l'ajustement des paramètres θ_b du modèle empirique uniquement. La partie fondamentale du modèle ne contient alors que des paramètres non-ajustables α . C'est ce que proposent Golden et Ydstie (1989) en utilisant la connaissance *a priori* du procédé pour élaborer un modèle fondamental à paramètres fixes représentant la non-linéarité statique du système. L'erreur procédé/modèle est prise en compte par une approximation du second ordre cette fois. Ici, la fonction objectif n'est décrite que par un modèle fondamental alors que la non-linéarité statique contient une partie fondamentale ainsi qu'une partie empirique ce qui permet une meilleure représentation locale de la non-linéarité du procédé.

Le modèle fondamental décrivant la relation entre les entrées et les sorties du procédé ne contient maintenant que des paramètres fixes α :

$$Y_p = H_p(u, x_m, \alpha) \quad (1.24)$$

Le problème d'optimisation est défini comme suit :

$$\min_u \quad \Phi_p(u, x_m, \alpha) \quad (1.25)$$

$$s.t. \quad F_p(u, x_m, \alpha) + F_b(u, x_m, \alpha, \theta_b) = 0 \quad (1.26)$$

où

$$\begin{aligned}
 F_b(u, x_m, \alpha, \theta_b) &\equiv \theta_{b2}(u^2 - u(k)^2) + \theta_{b1}(u - u(k)) + \theta_{b0} \\
 \theta_{b0} &= Y(k) - Y_p(k) \\
 \theta_{b1} &= \left. \frac{\partial Y_m}{\partial u} \right|_{u(k)} - \left. \frac{\partial Y_p}{\partial u} \right|_{u(k)} - k_1 u(k) \\
 \theta_{b2} &= \frac{1}{2} k_1 \quad \text{avec} \quad k_1 = \left(\left. \frac{\partial^2 Y_m}{\partial u^2} \right|_{u(k)} - \left. \frac{\partial^2 Y_p}{\partial u^2} \right|_{u(k)} \right)
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

La définition des paramètres k_1 et k_2 assure que le modèle possède les mêmes caractéristiques géométriques locales (gradient et courbure) que celles du procédé au point d'opération $u(k)$. Les valeurs de $\left. \frac{\partial Y_m}{\partial u} \right|_{u(k)}$ et $\left. \frac{\partial^2 Y_m}{\partial u^2} \right|_{u(k)}$ sont déterminées par l'application du théorème de la valeur moyenne finale à un modèle Hammerstein de 2ième ordre utilisé pour modéliser localement la dynamique du système.

Ce modèle s'écrit comme suit :

$$A(q^{-1})Y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})u^2(t-1) + \nu(t) \tag{1.28}$$

où q^{-1} représente l'opérateur de retard défini par $q^{-1}Y(t) = Y(t-1)$. Ce modèle peut être également représenté sous la forme suivante :

$$Y_m(t) = \Theta^T \varphi(t-1) + \nu(t) \tag{1.29}$$

où

$$\begin{aligned}\Theta^T &= [-a_1, -a_2, \dots, -a_n, b_0, b_1, \dots, b_m, c_0, c_1, \dots, c_m, \nu] \\ \varphi^T(t-1) &= [Y(t-1), \dots, Y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-m), u^2(t-1), \dots, u^2(t-m), 1]\end{aligned}$$

et ν , les non-linéarités et les dynamiques négligées.

L'identification des paramètres de ce modèle empirique se fait par une méthode d'estimation par moindres carrés récurrente (RLS) avec facteur d'oubli.

La partie statique de ce modèle est utilisée pour évaluer le gradient et le Hessien menant à l'expression de k_1 et k_2 :

$$\left. \frac{\partial Y_m}{\partial u} \right|_{u(k)} = 2 \frac{C(1)}{A(1)} u(k) + \frac{B(1)}{A(1)} \quad (1.30)$$

$$\left. \frac{\partial^2 Y_m}{\partial u^2} \right|_{u(k)} = 2 \frac{C(1)}{A(1)} \quad (1.31)$$

L'utilisation de la courbure dans le schéma d'optimisation en temps réel permet une meilleure performance. Toutefois, pour des systèmes à plusieurs entrées et sorties l'estimation du Hessien nécessitera une complexité de calcul qui augmente selon le carré du nombre de variables.

1.2.1.2 Méthodes utilisant les mesures de la fonction objectif et des contraintes inégalité

En 1990, Wellstead et Scotson utilise un modèle statique empirique dans une application pour l'industrie automobile. Ils posent alors l'hypothèse que le critère de performance peut être modélisé par une fonction quadratique. Le problème d'optimisation n'utilise aucun modèle fondamental cette fois et n'est constitué que d'une

partie empirique :

$$\min_u \Phi_b(u, \alpha, \theta_b) \quad (1.32)$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi(u, \alpha, \theta_b) &= \alpha_0 + \theta_{b0} + \theta_{b1}u + \theta_{b2}u^2 \\ \theta_{b0} &= \frac{\theta_{b1}^2}{4\theta_{b2}} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Les paramètres θ_b sont identifiés par un algorithme récursif de moindres carrés (RLS) appliqué au modèle réécrit sous sa forme incrémentale :

$$J(k) - J(k-1) = \theta_{b1}(u(k) - u(k-1)) + \theta_{b2}(u(k)^2 - u(k-1)^2) \quad (1.34)$$

où J provient directement des mesures disponibles.

Les entrées à appliquer au procédé à l'itération suivante sont déterminées par la résolution numérique du problème (1.32) :

$$u(k+1) = u^* + u_{pert}(k+1) \quad (1.35)$$

où u_{pert} est un signal d'excitation persistante nécessaire pour l'algorithme récursif de moindres carrés récursifs (RLS) et $u^* = \frac{-2\theta_{b1}}{\theta_{b2}}$. Bien que la simplicité du modèle utilisé est attrayante, cette méthode permettra au système de converger vers son

point optimal réel seulement si l'erreur de modélisation est négligeable. Or, si la fonction objectif ne se rapproche pas d'une quadratique, il y aura alors erreur quant au point d'équilibre atteint.

D'autres méthodes furent également proposées pour lesquelles les mesures de J et S sont requises. C'est le cas notamment de l'ouvrage de Desbiens et Shook (2003) qui proposent une méthode inspirée de la méthode de commande par modèle interne (Ogunnaike, 1994). Ainsi, un modèle simplifié du procédé (voir même linéaire) est utilisé et l'erreur de modélisation est considérée en introduisant des termes de compensation dans le problème d'optimisation tant au niveau de la fonction objectif que des contraintes. La convergence est assurée sous certaines hypothèses relativement à la structure de la fonction objectif notamment.

Plus récemment, Marchetti et al. (2009) ont proposé d'utiliser un modèle fondamental à paramètres fixes et de compenser l'erreur entre les coûts et les contraintes prédits par ce modèle en ajoutant des biais dans le problème d'optimisation original.

Le modèle utilisé contient une partie fondamentale à paramètres fixes et une partie empirique à paramètres ajustables. Le problème d'optimisation s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \min_u \quad & \Phi_p(u, \alpha) + \Phi_b(u, \theta_{\Phi b}) \\ \text{s.t.} \quad & S_p(u, \alpha) + S_b(u, \theta_{Sb}) \leq 0 \\ & u^L \leq u \leq u^U \end{aligned} \tag{1.36}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi_b(u, \theta_{\Phi b}) &= \theta_{Sb0} + \theta_{Sb1}^T (u - u(k)) \\ S_b(u, \theta_{Sb}) &= \theta_{\Phi b1}^T u \end{aligned}$$

et :

$$\theta_{Sb0} := S(u(k)) - S_p(u(k), \alpha) \quad (1.37)$$

$$\theta_{Sb1}^T := \frac{\partial S}{\partial u}(u(k)) - \frac{\partial S_p}{\partial u}(u(k), \alpha) \quad (1.38)$$

$$\theta_{\Phi b1}^T(u) := \frac{\partial J}{\partial u}(u(k)) - \frac{\partial \Phi_p}{\partial u}(u(k), \alpha) \quad (1.39)$$

Dans ce cas, l'identification par moindres carrés n'est pas nécessaire car les biais sont adaptés selon les lois de commande suivantes :

$$\theta_{\Phi b1}^T(k+1) = (1 - k_{\Phi b1,i})\theta_{\Phi b1}^T(k) + k_{\Phi b1,i} \left[\frac{\partial J}{\partial u}(u(k+1)) - \frac{\partial \Phi_p}{\partial u}(u(k+1), \alpha) \right] \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \theta_{Sb0,i}(k+1) &= (1 - k_{Sb0,i})\theta_{Sb0,i}(k) + k_{Sb0,i}[S_i(u(k+1)) - S_{p,i}(u(k+1), \alpha)], \\ i &= 1, \dots, n_s \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \theta_{Sb1,i}^T(k+1) &= (1 - k_{Sb1,i})\theta_{Sb1,i}^T(k) + k_{Sb1,i} \left[\frac{\partial S_i}{\partial u}(u(k+1)) - \frac{\partial S_{p,i}}{\partial u}(u(k+1), \alpha) \right], \\ i &= 1, \dots, n_s \end{aligned} \quad (1.42)$$

où $k_{Sb1,i}$, $k_{Sb2,i}$ et $k_{\Phi b1,i}$ représentent des gains d'adaptation et n_s le nombre de contraintes inégalité.

La principale difficulté rencontrée dans l'évaluation des paramètres θ_b réside dans l'obtention des gradients $\frac{\partial J}{\partial u}$ et $\frac{\partial S_i}{\partial u}$. Cette difficulté est d'autant plus grande pour des problèmes à grande dimension. L'identification de ces gradients peut se faire par une étape supplémentaire où le système est perturbé à partir du régime permanent comme pour la méthode ISOPE ou encore par l'information statique provenant d'un modèle dynamique local comme dans Golden et Ydstie (1989). Cette dernière alter-

native élimine le temps d'attente nécessaire entre chaque itération lorsque la première approche est utilisée. Toutefois l'identification des paramètres du modèle empirique dynamique nécessite l'insertion d'une excitation persistante dans le procédé.

Cette méthode, où seuls les biais sont mis à jour, se rapproche des méthodes de commande extrémale puisque le modèle utilisé n'est valide que localement et une mise à jour régulière des paramètres θ_b permet une correction progressive de l'évolution vers l'optimum.

1.2.2 Optimisation en temps réel par commande extrémale

La majeure partie des travaux sur la commande extrémale traite de problèmes d'optimisation sans contraintes bien qu'il soit possible de considérer des problèmes sous contraintes inégalité en utilisant notamment une fonction barrière comme celle du problème (1.7). Les méthodes de commande extrémale consistent à transformer le problème d'optimisation en un problème de commande. Ainsi, le modèle est utilisé pour extraire les informations nécessaires (gradient et parfois Hessien) permettant de commander le procédé dans une direction de descente. Ici, l'identification du modèle et l'évolution du système vers l'optimum se fait de façon simultanée contrairement aux méthodes avec résolution numérique.

La plupart des méthodes de commande extrémale font évoluer l'entrée u du système réel dans le sens opposé du gradient estimé :

$$\dot{u} = -k\hat{g} \quad (1.43)$$

où $\hat{g} = \frac{\partial \Phi_m}{\partial u}$ est une estimation du gradient $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$. Dans ce cas, le modèle n'est pas utilisé pour identifier u^* mais plutôt pour estimer le gradient. La structure générale de la

commande extrême est représentée à la Figure 1.2. Ces méthodes se distinguent entre elles par la façon dont le gradient est estimé.

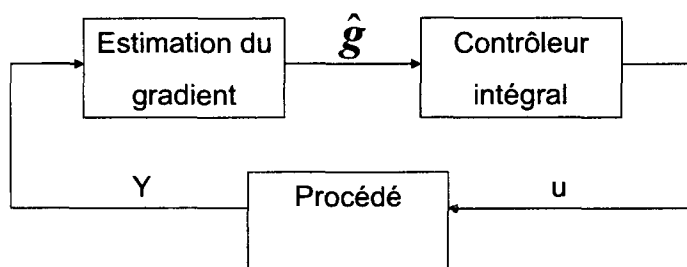


Figure 1.2 Structure générale des méthodes de commande extrême

Les principales méthodes de commande extrême sont maintenant présentées. Tout comme pour les méthodes avec résolution numérique, elles sont regroupées en deux principales catégories selon le type de mesures disponibles : si seules des mesures auxiliaires sont disponibles, un modèle fondamental est utilisé pour estimer le gradient alors que si les mesures de la fonction objectif J et des contraintes S (s'il y a lieu) sont disponibles, l'évaluation du gradient peut se faire directement à partir de ces mesures par l'utilisation d'un modèle empirique seulement.

1.2.2.1 Méthodes utilisant les mesures auxiliaires

La commande extrême avec modèle adaptatif (Guay et Zhang, 2003; Zhang et al., 2003) est possible lorsque seules certaines mesures auxiliaires sont disponibles. Un modèle fondamental est alors utilisé pour décrire le comportement du procédé. La fonction objectif ne dépend que des états (mesurables) du procédé et de certains paramètres du modèle et non des entrées du système. Le problème est défini comme suit :

$$\min_u J_m = \Phi_p(x_m, \theta_p, \alpha) \quad (1.44)$$

$$s.t. \quad F_p(u, x_m, \theta_p, \alpha) = 0 \quad (1.45)$$

Ici, on assume que le vecteur des variables d'état x_m et celui des entrées u sont de même dimension. Le vecteur d'états x_m évolue selon l'équation F_p dont la structure est donnée par :

$$\dot{x}_m = F_p(u, x_m, \theta_p, \alpha) = F_1(x_m) + F_2(x_m)\theta_p + F_3(x_m)u \quad (1.46)$$

Ainsi, la loi de commande extrémale peut s'écrire en fonction de x_m :

$$\dot{x}_m = -k\hat{g} = -k \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_m} \quad (1.47)$$

Puisque le vecteur d'entrées et le vecteur d'états sont de même dimension, cette loi de commande peut être réalisée par la conception d'un contrôleur inverse. Toutefois, l'utilisation d'un tel type de contrôleur nécessite une composante stabilisante. Ainsi, une fonction de Lyapunov assignable est utilisée pour définir des lois de commande et d'estimation à partir des conditions de stabilité. La loi de commande est définie comme suit :

$$u = -b^T(x_m, \hat{\theta}_p)[b(x_m, \hat{\theta}_p)b^T(x_m, \hat{\theta}_p)]^{-1}[a(x_m, \hat{\theta}_p) + |a(x_m, \hat{\theta}_p)| + b(x_m, \hat{\theta}_p)b^T(x_m, \hat{\theta}_p)] \quad (1.48)$$

où,

$$\begin{aligned}
 a(x_m, \hat{\theta}_p) = & \left[\frac{\partial \phi_p(x_m, \hat{\theta}_p)}{\partial x_m} - d(t) \right] \left\{ \frac{\partial^2 \phi_p(x_m, \hat{\theta}_p) \dot{\hat{\theta}}_p}{\partial x_m \partial \hat{\theta}_p} - \dot{d}(t) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 \phi_p(x_m, \hat{\theta}_p) \dot{\hat{\theta}}_p}{\partial x_m \partial x_m^T} [F_1(x_m) + F_2(x_m) \hat{\theta}_p] \right\}
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

$$b(x_m, \hat{\theta}_p) = \left[\frac{\partial \phi_p(x_m, \hat{\theta}_p)}{\partial x_m} - d(t) \right] \frac{\partial^2 \phi_p(x_m, \hat{\theta}_p)}{\partial x_m \partial x_m^T} F_3(x_m) \tag{1.50}$$

et $d(t)$, un signal exogène assurant une excitation persistante. Les valeurs des paramètres $\hat{\theta}_p$ sont estimées en utilisant un observateur O.B.E. ("observer based estimator") couplé à un algorithme de projection. La prédiction de x_m est donnée par :

$$\dot{\hat{x}}_m = F_1(x_m) + F_2(x_m) \hat{\theta}_p + F_3(x_m) u + K e \tag{1.51}$$

$$e = x - \hat{x}_m \tag{1.52}$$

avec K une matrice de gains symétriques, définie positive et x les mesures disponibles des états apparaissant dans la fonction objectif.

Cette équation d'observation génère une erreur d'estimation décrit par :

$$\dot{e} = F_2(x_m) \tilde{\theta}_p - K e \tag{1.53}$$

utilisée pour l'adaptation des paramètres $\hat{\theta}_p$, selon un algorithme de projection (Krstic et al., 1995).

La méthode s'applique également dans des cas où il y a plus de variables d'états que d'entrées en autant que ces états supplémentaires n'influencent pas la fonction objectif.

Cette méthode s'applique également lorsque la structure de la fonction objectif est inconnue. C'est le cas dans les travaux de Guay et al. (2005) où la méthode est appliquée à un problème d'optimisation de la concentration de produit dans un réacteur non-isotherme à agitation continue pour lequel la structure de la fonction objectif est inconnue. La fonction objectif est fonction des différentes concentrations dans le réacteur en régime permanent. Seule une mesure de température est disponible. La variable manipulée est le taux de changement de la température. La fonction objectif qui n'est fonction que de la température est estimée par réseaux de neurones.

Puisque le modèle n'est pas utilisé pour identifier numériquement la solution optimale, l'adaptation d'un modèle fondamental n'est pas une nécessité : un modèle local est suffisant. C'est ce que confirment les travaux de Bamberger et Isermann (1978) où, tout comme dans les travaux de (Golden et Ydstie, 1989), la partie statique d'un modèle empirique dynamique de type Hammerstein de deuxième ordre du procédé est utilisé pour estimer le gradient et le Hessien. Le problème d'optimisation est défini par une fonction objectif représentée par un modèle fondamental à paramètres fixes et d'une non-linéarité statique représentée par un modèle empirique à paramètres ajustables :

$$\min_u \quad \phi_p(\alpha, x_m) \quad (1.54)$$

$$s.t. \quad F_b(u, x_m, \theta_b) = 0 \quad (1.55)$$

Les variables d'états x_m sont mesurées i.e. $Y_m = x_m$. Les paramètres ajustables θ_b

sont identifiés à partir d'un modèle empirique dynamique tel que celui utilisé par Golden et Ydstie (1989) et décrit par l'équation (1.28). La partie statique de ce modèle est alors utilisé pour évaluer le gradient $\frac{\partial \phi_p}{\partial u}$ et le Hessien $\frac{\partial^2 \phi_p}{\partial u^2}$.

La méthode proposée est composée de 3 étapes distinctes :

- introduction d'un signal de perturbation à l'entrée du système pour obtenir une première identification grossière du modèle empirique dynamique
- optimisation-identification : la partie statique du modèle empirique est utilisée pour déterminer le point d'opération optimal par la méthode de Newton. L'identification du modèle est ensuite répétée et l'amplitude du signal de perturbation est graduellement diminuée
- supervision : lorsque l'étape précédente mène à la convergence, la valeur du critère de performance obtenu à partir des mesures est comparé à celle provenant du modèle. Si une différence non-négligeable existe, l'étape d'optimisation-identification est reprise

La loi de commande extrémale utilisée s'exprime comme suit :

$$u(t+1) = u(t) - \Gamma^{-1}(t) \frac{\partial \phi_p}{\partial u}(\hat{\theta}_b, t) \quad (1.56)$$

où,

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial u} = \left(\frac{\partial \phi_p}{\partial Y_m} \right)^T \left(\frac{\partial Y_m}{\partial u} \right) \quad (1.57)$$

avec Γ^{-1} représentant l'inverse du Hessien soit :

$$\Gamma^{-1} = \left(\frac{\partial^2 \phi_p}{\partial u^2} \right)^{-1} \quad (1.58)$$

Les expressions de $\frac{\partial Y_m}{\partial u}$ et $\frac{\partial^2 Y_m}{\partial u^2}$ nécessaires à l'évaluation de $\frac{\partial \phi_p}{\partial u}$ et $\frac{\partial^2 \phi_p}{\partial u^2}$ sont donnés

directement par la partie statique du modèle dynamique (voir équations (1.28-1.31)).

Les travaux de Garcia et Morari (1981) montrent qu'un simple modèle empirique linéaire peut être utilisé pour la commande extrémale.

Le problème d'optimisation est défini comme suit :

$$\min_u \quad \phi_p(u, \alpha, x_m) \quad (1.59)$$

$$s.t. \quad F_b(u, x_m, \theta_b) = 0 \quad (1.60)$$

avec $x_m = Y_m$

Cette fois le modèle dynamique linéaire suivant est utilisé pour identifier les paramètres θ_b :

$$A(q^{-1})Y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \nu(t) \quad (1.61)$$

où ν représente ici le bruit stationnaire corrélé.

La loi de commande est :

$$u(t+1) = u(t) - \omega K(t) \frac{d\phi_p(t)}{du}(\hat{\theta}_b, t) \quad (1.62)$$

où ω est un pas constant, $K(t)$ une matrice définie positive. Cette matrice peut être soit l'inverse du Hessien (méthode de Newton) ou l'approximation du Hessien (méthode Quasi-Newton) ou encore la matrice identité (méthode de la plus forte pente). $\frac{d\phi_p}{du}$ est donné par :

$$\frac{d\phi_p}{du}(t) = \frac{\partial \phi_p}{\partial u}(t) + \frac{\partial \phi_p}{\partial Y_m}(t) \left(\frac{dY_m}{du}(t) \right)^T \quad (1.63)$$

et,

$$\left(\frac{dY_m}{du^T}\right)(k) = (A(1)^{-1}B(1))(t) \quad (1.64)$$

est fourni par la partie statique du modèle dynamique. La méthode requiert l'ajustement de 3 paramètres soit ω , le pas d'optimisation, le temps d'échantillonnage et λ , le facteur d'oubli.

Encore une fois, l'utilisation des mesures auxiliaires seules n'assure pas que les conditions de KKT soient respectées et que l'optimum réel du procédé soit atteint. Les méthodes présentées dans la prochaine section utilisent la mesure de la fonction objectif et des contraintes inégalité si nécessaire pour diminuer l'erreur de convergence.

1.2.2.2 Méthodes utilisant les mesures de la fonction objectif et des contraintes inégalité

Tout comme Garcia et Morari (1981), McFarlane et Bacon (1989) utilisent un modèle empirique dynamique linéaire et considèrent un problème avec contraintes inégalité. Le respect des contraintes inégalité est assuré par l'utilisation de fonctions de désirabilité. Le problème d'optimisation s'exprime comme suit :

$$\min_u \quad \Phi_m(u, \alpha, x_m) \quad (1.65)$$

$$S_m(u, x_m) \leq 0 \quad (1.66)$$

avec les états mesurables, i.e. $x_m = Y_m$ et une fonction de désirabilité (Harrington, 1965) d_i est associée à chacune des contrainte du problème (1.65) :

$$d_i = d_i(Y_{m,i}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.67)$$

où $d_i = 0$ si la valeur de $Y_{m,i}$ est complètement inacceptable et $d_i = 1$ si la valeur de $Y_{m,i}$ est complètement acceptable. d est la fonction de désirabilité globale telle que $d = 0$ si $\exists d_i = 0$:

$$d = (d_1 d_2 \dots d_n)^{1/2} \quad (1.68)$$

Le problème sous contraintes (1.65) est ainsi transformé en un problème d'optimisation sans contrainte en régime permanent :

$$\min_u \quad \Phi_d(u, Y_m) = \Phi_d = \Phi_m(u, Y_m) d \quad (1.69)$$

Le critère de performance modifié ϕ_d est alors modélisé comme suit :

$$A(q^{-1})\Phi_d(t) = B_1(q^{-1})u_1(t) + \dots + B_p(q^{-1})u_p(t) + c + \nu(t) \quad (1.70)$$

avec $E[\nu(t)] = 0$. Puisque Φ et d sont évalués directement à partir des mesures, les paramètres de ce modèle sont identifiables et le gradient $\frac{\Phi_d}{du}$ en régime permanent est donné par :

$$\frac{d\phi_d}{du} = \left[\frac{B_1(1)}{A(1)} \dots \frac{B_p(1)}{A(1)} \right] \quad (1.71)$$

Les pas d'optimisation sont fixés comme suit :

$$u(k) = u(k) + \omega \frac{d\phi_d}{du} \quad (1.72)$$

Avec ω , le pas d'optimisation calculé en ligne tel qu'aucun des changements sur les entrées ne dépasse une certaine valeur limite maximale.

L'utilisation d'un modèle dynamique permet de gagner en temps puisque l'identification ne nécessite pas une échelle de temps différente. Toutefois, une bonne identification des paramètres dynamiques nécessite que le système soit suffisamment excité. Or une excitation trop rapide introduira une erreur quant à l'estimation du gradient statique à partir des paramètres du modèle dynamique. Afin de diminuer l'erreur d'estimation sur le gradient statique un modèle statique peut être utilisé. Toutefois, l'utilisation d'un modèle statique nécessite l'élimination des effets de la dynamique du procédé sur l'estimation de ses paramètres. Ces effets sont généralement éliminés par une séparation des échelles de temps.

Le premier ouvrage relatif à la méthode des perturbations remonte à aussi loin que 1922 (Leblanc, 1922). Cette méthode dont la structure est présentée à la Figure 1.3 utilise un modèle local statique et le problème d'optimisation s'exprime comme suit :

$$\min_u \quad \phi_b(u, \theta_b) = \theta_{b0} + \theta_{b1}u \quad (1.73)$$

avec $\theta_{b0} = \eta$, la valeur moyenne de ϕ_b et $\theta_{b1} = \hat{g}$, le gradient estimé. La fonction objectif étant considérée convexe, la condition nécessaire d'optimalité de ce problème est :

$$\theta_{b1} = \hat{g} = 0 \quad (1.74)$$

La méthode de perturbation (Krstic et Wang, 2000; Wang et al., 1999) consiste à superposer à l'entrée du système une perturbation de faible amplitude et d'extraire le gradient $\hat{g} = \frac{\partial \phi_b}{\partial u}$ à partir de la réponse du système à cette perturbation. Pour ce faire, un filtre passe-haut de fréquence de coupure ω_h permet d'éliminer la valeur

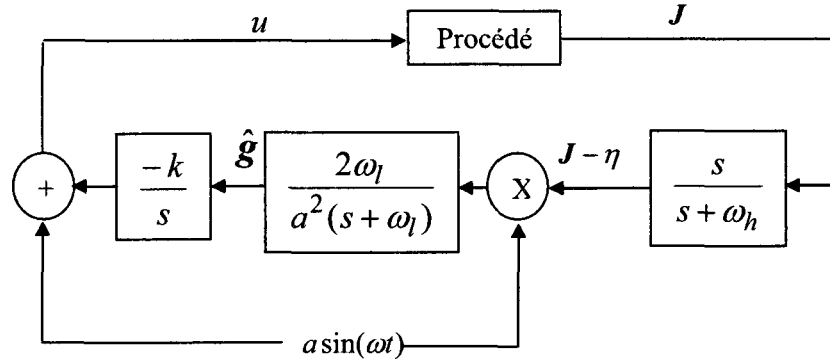


Figure 1.3 Structure de la méthodes des perturbations

moyenne de ϕ_b , notée η , afin de ne conserver que la partie oscillante résultant de la perturbation. Par la suite, une corrélation entre le signal de perturbation et le signal de sortie du filtre passe-haut permet l'estimation du gradient : si les deux signaux sont en phase, le gradient est positif alors que si les deux signaux sont déphasés, le gradient est négatif. L'utilisation d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure ω_l permet d'extraire la valeur moyenne de ce signal résultant et d'utiliser cette valeur comme estimation du gradient \hat{g} . L'utilisation d'un contrôleur intégral de gain k permet la commande de ce gradient vers 0.

Les lois de commande d'une telle structure s'écrivent comme suit :

$$\dot{u} = -k\hat{g} \quad (1.75)$$

$$\dot{\hat{g}} = -\omega_l\hat{g} + \omega_l(J - \eta)asin(\omega t) \quad (1.76)$$

$$\dot{\eta} = -\omega_h\eta + \omega_h J \quad (1.77)$$

où J est la mesure de la fonction objectif. En 2000, la stabilité (locale pour les systèmes non-linéaires et globale pour les systèmes linéaires) de la méthode des per-

turbations est démontrée (Krstic et Wang, 2000). La preuve est basée sur des outils de "moyennage" et d'analyse de perturbation singulière.

La relation entre le déphasage des deux signaux et le gain statique est vrai si le système peut être considéré comme statique. Toutefois, si le système répond relativement lentement, il y aura un effet dynamique d'introduit : la sortie ne varie plus seulement en fonction du changement actuel de l'entrée, mais est aussi influencée par les changements antérieurs. Ce phénomène se traduit par l'apparition d'un retard dans la partie de la sortie associée au signal de perturbation et y introduit donc un déphasage. Si la non-linéarité du système n'est que statique et la dynamique est linéaire, la fonction objectif peut-être représentée par une cascade de systèmes linéaires dynamiques et un système non-linéaire statique. Dans ce cas précis, on pourra alors compenser l'effet de la dynamique du système en introduisant un retard de phase dans le signal de perturbation avant de faire la corrélation (Ariyur et Krstic, 2003). En réalité, il existe plusieurs systèmes qui comportent une non-linéarité dynamique et cette séparation ne peut s'appliquer. Dans ces cas, l'ajustement des paramètres de la méthode de perturbations devra être fait afin d'assurer des échelles de temps différentes entre le système, la perturbation et les filtres :

- le plus rapide - le procédé avec le contrôleur
- vitesse moyenne - la perturbation sinusoïdale
- le plus lent - les filtres passe-haut et passe-bas (s'il y a lieu).

La méthode des perturbations est attrayante par sa simplicité. Toutefois, l'inconvénient majeur de cette méthode est la lenteur de réponse du système en boucle fermée spécialement pour des systèmes présentant une non-linéarité dynamique.

En 2007, une autre méthode d'optimisation en temps réel utilisant un modèle linéaire statique définissant le problème (1.73) fut proposée (Srinivasan, 2007). Cette méthode dont la structure est présentée à la figure 1.4, requiert la présence d'unités identiques au sein du procédé à optimiser. Ces unités sont opérées à des entrées décalées par une perturbation constante Δ . Le gradient \hat{g} est estimé par différences finies entre les sorties des différentes unités. La ligne en gras dans la figure 1.4 représente une concaténation des m-composantes du gradient en un seul vecteur $\hat{g}(u_0, \xi_{all})$.

L'applicabilité de cette méthode repose sur la présence de $m + 1$ unités identiques dans le système à optimiser où m est le nombre d'éléments dans le vecteur d'entrée u . La première unité est choisie comme unité de référence et est opérée à une valeur d'entrée notée u_0 . Toutes les autres unités, $i=\{1, \dots, m\}$ sont opérées à :

$$u_i = u_0 + e_i \Delta \quad (1.78)$$

où e_i est le i^{ime} vecteur unité. Si la valeur de la fonction objectif J peut être mesurée alors le gradient est estimé par :

$$\hat{g}_i(u_0, \xi_{all}) = \frac{J(x_i, u_i) - J(x_0, u_0)}{\Delta} = \frac{J(\bar{x}(u_i) + \xi_i, u_i) - J(\bar{x}(u_0) + \xi_0, u_0)}{\Delta} \quad (1.79)$$

où :

$\xi_i = x_i - \bar{x}(u_i)$ ($\bar{x}(u_i)$ est la valeur de la variable d'état en régime permanent). ξ_{all} = vecteur de toutes les valeurs de ξ_i

La loi de commande extrémale s'écrit comme suit :

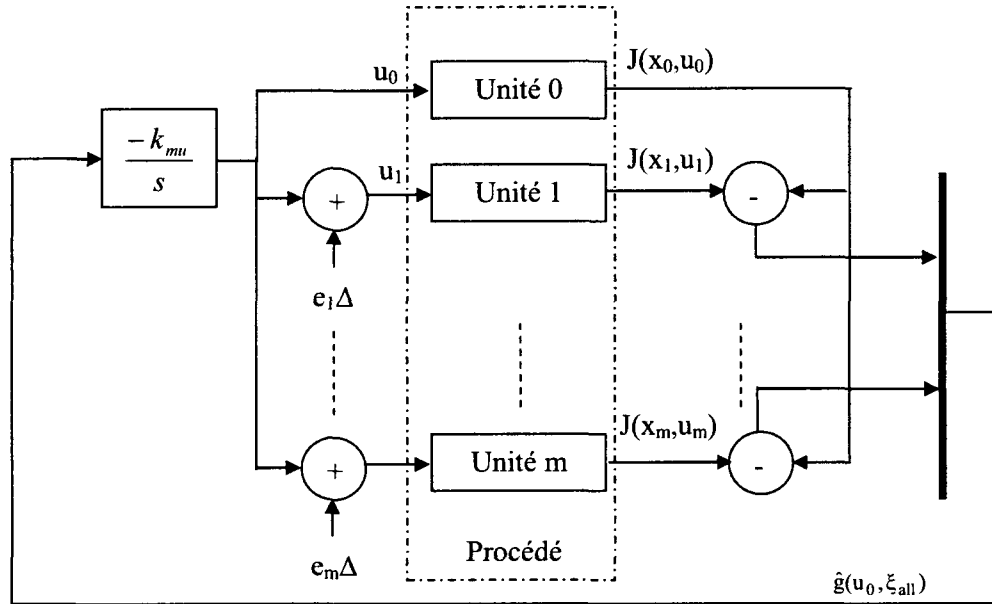


Figure 1.4 Structure de la méthode multi-unités

$$\dot{u}_i = -k_{mu} \hat{g}^T(u_0, \xi_{all}) \quad i \in \{0, 1, \dots, m\} \quad (1.80)$$

avec k_{mu} le gain d'adaptation de la méthode multi-unités.

Comme les unités sont identiques, elles présentent les mêmes dynamiques. Ces dynamiques sont éliminées lors de l'estimation du gradient par différences finies ce qui permet une adaptation beaucoup plus rapide pour le contrôleur intégral. Comme la perturbation n'est pas temporelle, aucun filtre n'est nécessaire ici. La seule séparation d'échelle de temps nécessaire est entre l'adaptation et la dynamique du système permettant ainsi une convergence vers l'optimum plus rapide notamment pour les procédés à réponse lente tels des procédés chimiques ou biochimiques. Comme aucune perturbation sinusoïdale n'est nécessaire, il n'y aura pas d'oscillations autour du point optimal. Toutefois, cette méthode n'est applicable que dans les procédés comportant plusieurs unités identiques.

La présente thèse s'intéresse à la méthode d'optimisation multi-unités qui se rapproche beaucoup de la méthode des perturbations puisque toutes deux estiment le gradient à partir d'un modèle empirique statique linéaire. Afin de mettre en évidence l'avantage majeur de la méthode multi-unités par rapport à la méthode des perturbations soit une convergence plus rapide, ces deux méthodes sont utilisées dans un exemple de simulation dont les résultats sont présentés à la section suivante.

1.3 Exemple illustratif : optimisation de la productivité de deux bioréacteurs identiques

La méthode de perturbation et la méthode d'optimisation multi-unités ont été appliquées à l'optimisation de la productivité d'un procédé comportant deux bioréacteurs indépendants parfaitement identiques. Le modèle mathématique du bioréacteur décrit à l'Annexe I fut utilisé pour simuler le procédé réel. Ce modèle sert à identifier clairement le point optimal visé et agit également comme "boîte noire" dans les boucles d'optimisation en temps réel utilisées.

Le problème considéré est la maximisation de la productivité de protéines vert fluorescent (GFP) durant la phase de production par l'ajustement en temps réel du débit d'alimentation en substrat au bioréacteur. Les valeurs numériques des paramètres du modèle sont également fournies à l'Annexe I (voir Tableau I.1). On considère ici que le mode chémostatique (régime permanent) est atteint avant que l'optimisation ne débute. L'instant $t = 0$ correspond donc à l'instant, durant la phase de post-induction, où l'optimisation débute.

$$\begin{aligned} \max_{u=q} \quad & J = \frac{qC_P}{V} \\ \text{s.t.} \quad & (I.1), (I.2), (I.3) \equiv 0 \end{aligned}$$

La courbe statique reliant la productivité de protéines qC_P au débit de substrat q en régime permanent est présentée à la figure suivante :

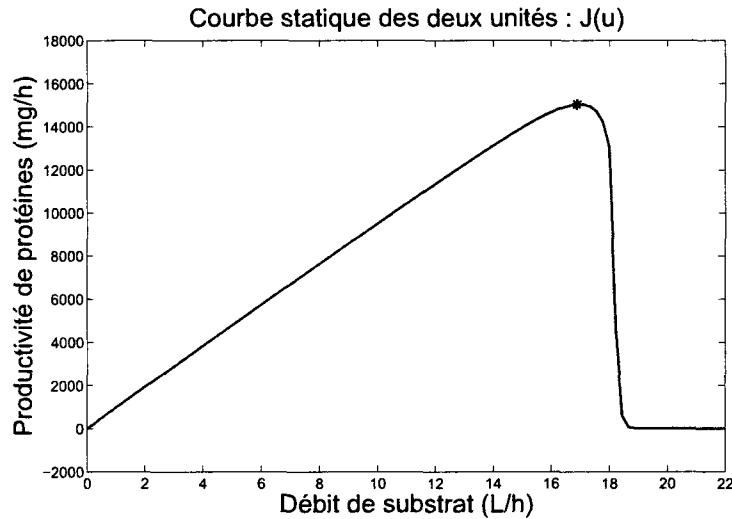


Figure 1.5 Courbe statique des deux bioréacteurs identiques

Le point d'opération optimal du bioréacteur correspond à un débit de substrat de 16.97 L/h et à une productivité de GFP de 15047 mg/h .

Des réponses à l'échelon pour différentes valeurs de débit de substrat ont permis de constater que le bioréacteur présente une dynamique fortement non-linéaire. Ainsi, les temps de réponse du système varient de 2 à 15 heures selon la plage d'opération, la réponse la plus rapide étant obtenue autour de l'optimum. Le temps de réponse le plus long a été considéré dans l'ajustement des paramètres des méthodes utilisées.

Les valeurs initiales des deux unités correspondent à des débits de substrat de 7 L/h

et $8 L/h$ pour une valeur de Δ fixé à $1 L/h$. Ces données sont présentées au Tableau I.3 de l'Annexe I. Dans le présent exemple, la méthode multi-unités consiste à opérer les 2 bioréacteurs selon les équations suivantes :

$$q_2 = q_1 + \Delta \quad (1.81)$$

$$\dot{q}_1 = k \frac{J_2 - J_1}{\Delta} = k \frac{q_2 C_{P,2} V - q_1 C_{P,1} V}{\Delta} \quad (1.82)$$

Comme en témoignent les résultats présentés à la Figure 1.6, la méthode multi-unités amène le système à opérer à son point optimal en une centaine d'heures environ. Les débits de substrat des deux bioréacteurs conservent toujours un écart de $\Delta = 1 L/h$ et les points d'opération optimaux obtenus sont de $q_1^* = 16.41 L/h$, $q_2^* = 17.41 L/h$, $J_1^* = J_2^* = 14891 mg/h$. Le point d'équilibre moyen, $q^* = (q_1^* + q_2^*)/2$, est de $16.91 L/h$ ce qui ne correspond pas exactement à l'optimum réel. Cette faible différence est causée par un changement de courbure d'un côté à l'autre de l'optimum (voir Figure 1.5). Le débit moyen de convergence de la méthode multi-unités se trouve ainsi décentré vers une valeur inférieure par rapport à l'optimum réel.

Pour fins de comparaison, la méthode de perturbation est également appliquée à ce procédé. Le tableau I.2 contient les valeurs de réglage de cette méthode. Elles ont également été fixées en tenant compte du temps de réponse le plus long du système. Ainsi, la fréquence de la perturbation correspond à un signal d'une période de 105 heures, soit une perturbation 7 fois plus lente que la dynamique du système.

Les résultats obtenus par la méthode de perturbations sont présentés à la Figure 1.7. Cette fois l'optimum est atteint en 6000 heures.

Une comparaison des résultats des deux méthodes permet de constater que pour ce

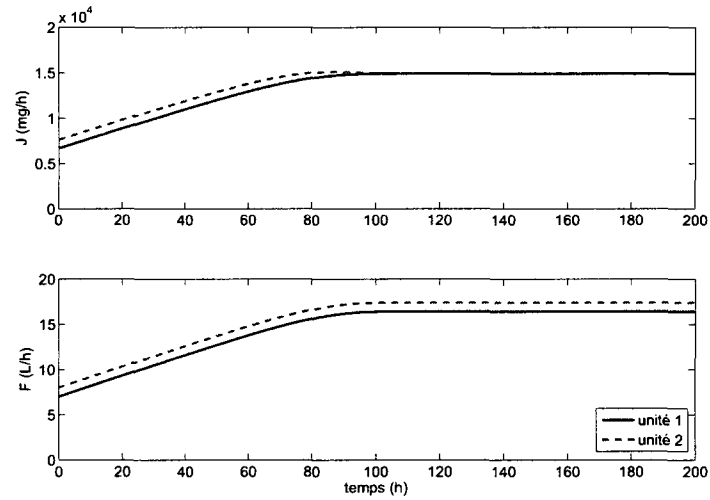


Figure 1.6 Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs identiques selon la méthode multi-unités

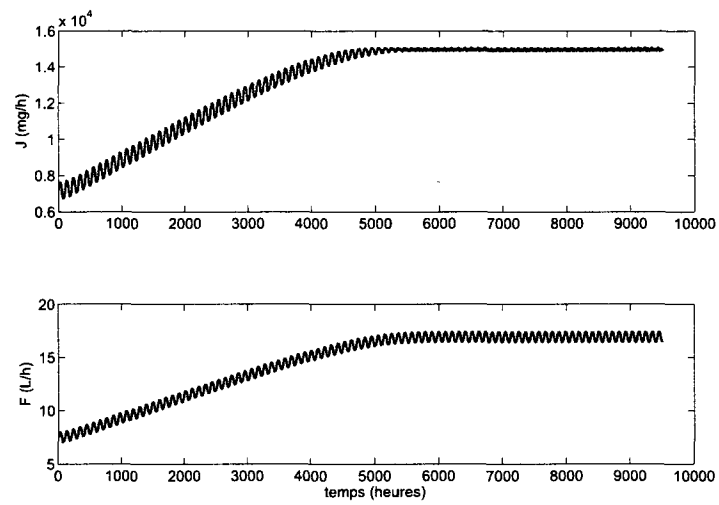


Figure 1.7 Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs identiques selon la méthode de perturbation

procédé, la méthode multi-unités converge 6 fois plus rapidement que la méthode de perturbation. De plus, la méthode multi-unités n'introduit aucune oscillation autour de l'optimum contrairement à la méthode de perturbation.

CHAPITRE 2

OPTIMISATION MULTI-UNITES EN PRÉSENCE D'UNITES NON IDENTIQUES

Comme en témoignent les résultats de simulation présentés à la fin du chapitre précédent, la méthode multi-unités présente un net avantage par rapport à la méthode de perturbation quant à sa vitesse de convergence. Toutefois, elle est fondée sur une hypothèse plutôt forte qui suppose que les unités du procédé à optimiser sont identiques. Or, bien que plusieurs procédés contiennent des unités conçues sous les mêmes critères de conception de telle sorte à être utilisées en parallèle, cette hypothèse sera rarement vérifiée en pratique.

Le présent chapitre vise donc, dans un premier temps, à étudier l'influence des différences dans les courbes statiques des unités d'un procédé sur la convergence de la méthode multi-unités. Ensuite, le principe de correcteurs adaptatifs est introduit dans la méthode multi-unités afin d'en améliorer la performance lorsque appliquée à des procédés comportant des unités semblables, mais non parfaitement identiques quant à leurs caractéristiques statiques. Deux types d'adaptation des correcteurs sont présentés soit une adaptation séquentielle et une adaptation simultanée.

2.1 Effets de la présence d'unités non identiques sur les performances de la méthode d'optimisation multi-unités

2.1.1 Définition du problème : caractérisation des différences entre les unités

La présence de différences entre les unités d'un procédé peut se manifester sous diverses formes. Par exemple, la dynamique des unités peut être différente : les unités peuvent répondre plus ou moins rapidement à une même variation en entrée. L'étude de l'effet de telles différences sur la convergence de la méthode multi-unités a démontré que la stabilité de la méthode peut être assurée par un choix adéquat du signe de Δ en fonction d'une connaissance relativement restreinte du procédé quant aux temps de réponses relatifs des unités (Reney, 2008).

Les caractéristiques statiques des unités peuvent également différer. La première partie de ce chapitre vise à analyser le comportement de la méthode multi-unités lorsqu'elle est appliquée à un procédé dont les unités n'ont pas la même caractéristique statique.

Les hypothèses suivantes définissent le problème à l'étude :

- Le problème d'optimisation comporte une seule variable manipulée et le procédé contient deux unités similaires
- La dynamique du système est très rapide devant l'échelle de temps de l'optimisation, i.e. le procédé peut être considéré en mode quasi-statique
- Les mesures sont exemptes de tout bruit
- La fonction objectif est une fonction convexe
- Le problème d'optimisation ne contient aucune contrainte inégalité

Soit $J_1(u_1)$ et $J_2(u_2)$, les courbes statiques des unités 1 et 2 du procédé respectivement tel que,

$$\left. \frac{\partial J_1}{\partial u} \right|_{u_1^{opt}} = \left. \frac{\partial J_2}{\partial u} \right|_{u_2^{opt}} = 0 \quad (2.1)$$

où u_1^{opt} et u_2^{opt} sont les optima de la première et de la seconde unité respectivement, la relation entre les courbes statiques des deux unités se formule comme suit :

$$J_2(u) = J_1(u + \beta) + \gamma + \bar{J}(u + \beta) \quad (2.2)$$

où,

$$\beta = u_1^{opt} - u_2^{opt} \quad (2.3)$$

$$\gamma = J_2(u_2^{opt}) - J_1(u_1^{opt}) \quad (2.4)$$

Cette expression traduit un décalage entre les deux unités tant sur l'entrée, u (quantifiée par β), que sur la sortie, J (quantifiée par γ). La fonction \bar{J} représente la différence de courbure entre les caractéristiques statiques des deux unités en tout point d'opération.

La fonction \bar{J} ainsi que sa dérivée, évaluées au point d'opération u_1^{opt} peuvent être obtenues en évaluant l'équation (2.2) au point $u = u_2^{opt}$. Après simplification, ces expressions deviennent :

$$\bar{J}(u_1^{opt}) = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{J}}{\partial u} \right|_{u_1^{opt}} = 0 \quad (2.5)$$

Ainsi, dans le voisinage de l'optimum, si la différence de courbures entre les deux unités à leur optimum respectif est négligeable, i.e. $\frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial u^2} \simeq 0$, \bar{J} peut être considéré comme nulle, $\bar{J} \simeq 0$. Cette hypothèse vient compléter la description du problème à l'étude.

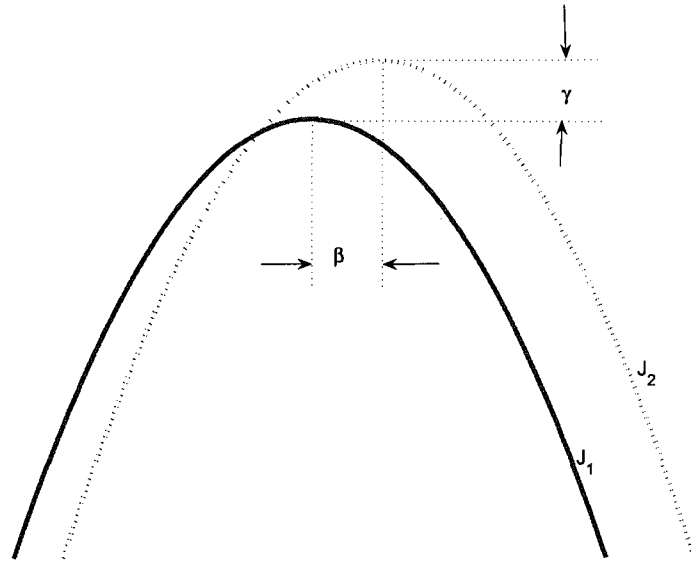


Figure 2.1 Exemple de caractéristiques statiques différentes avec $\bar{J} = 0$

A titre d'exemple, la figure 2.1 représente deux unités dont les caractéristiques statiques sont différentes selon l'équation (2.2) mais possèdent les mêmes courbures i.e. $\bar{J} = 0$.

2.1.2 Équilibre de la méthode d'optimisation multi-unités en présence d'unités non identiques

La première étape de la présente démarche consiste à identifier l'effet qu'auront les différences entre les courbes statiques des 2 unités du procédé à optimiser sur la convergence de la méthode multi-unités tel que définie par Srinivasan (2007).

Les différences statiques des unités ont un effet direct sur le point de convergence de la méthode multi-unités : la méthode amène les unités non identiques à des points d'équilibre qui peuvent être plus ou moins éloignés des optima réels des deux unités.

gradient multi-unités (1.79). Si $\bar{J} \simeq 0$ dans le voisinage de l'optimum, alors u^* , le point d'équilibre de la méthode multi-unités avec des unités non identiques définies par (2.2) peut être approximé par :

$$u^* \simeq \frac{u_1^{opt} + u_2^{opt}}{2} - \frac{\gamma}{(\Delta + \beta) \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2}} \quad (2.6)$$

Preuve : La convergence est obtenue lorsque $\hat{g}(u) = 0$, i.e. $J_2(u_2^*) - J_1(u_1^*) = 0$. En utilisant (1.79) et (2.2) on obtient :

$$J_1(u_2^* + \beta) + \gamma + \bar{J}(u_2^* + \beta) - J_1(u_1^*) = 0 \quad (2.7)$$

En considérant $\bar{J} = 0$, l'expansion en séries de Taylor du second ordre autour du point u_1^{opt} donnera l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J_1}{\partial u} \right) \Big|_{u_1^{opt}} (u_2^* + \beta - u_1^{opt}) &- \left(\frac{\partial J_1}{\partial u} \right) \Big|_{u_1^{opt}} (u_1^* - u_1^{opt}) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right) \Big|_{u_1^{opt}} (u_2^* + \beta - u_1^{opt})^2 \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right) \Big|_{u_1^{opt}} (u_1^* - u_1^{opt})^2 + \gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Puisque $\left(\frac{\partial J_1}{\partial u} \right) \Big|_{u_1^{opt}} = 0$ et que $u_2^* = u_1^* + \Delta$ cette équation peut être réduite à l'expression suivante :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right) (u_1^* + \Delta + \beta - u_1^{opt})^2 + \gamma - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right) (u_1^* - u_1^{opt})^2 = 0 \quad (2.9)$$

Et, en regroupant les termes, cette équation devient :

$$\left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right) (u_1^* - u_1^{opt})(\Delta + \beta) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right) (\Delta + \beta)^2 + \gamma = 0 \quad (2.10)$$

ce qui permet d'extraire la solution pour u_1^* :

$$u_1^* = u_1^{opt} - \frac{\Delta + \beta}{2} - \frac{\gamma}{(\Delta + \beta) \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2}} \quad (2.11)$$

Puisque $u^* = u_1^* + \Delta/2$ et $u_1^{opt} - \beta/2 = \frac{u_1^{opt} + u_2^{opt}}{2}$,

$$u^* \simeq \frac{u_1^{opt} + u_2^{opt}}{2} - \frac{\gamma}{(\Delta + \beta) \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2}} \quad (2.12)$$

et la proposition est démontrée. \square

Si la différence de courbures entre les fonctions des deux unités n'est pas négligeable, il y aura alors deux points d'équilibre, l'un stable et l'autre instable. L'exemple illustratif présenté ultérieurement (voir section 2.1.4) permet d'illustrer ceci.

2.1.3 Stabilité de la méthode d'optimisation multi-unités en présence d'unités non identiques

Les différences statiques entre les unités peuvent amener le procédé à converger à un point d'opération éloigné du point optimum réel, mais peuvent également l'amener à diverger. Les conditions permettant d'assurer la convergence du procédé sont maintenant présentées.

Théorème 2.1.1. *Soit la loi de commande extrême (1.80) et l'estimation du gradient par la méthode multi-unités (1.79). Si $\bar{J} \simeq 0$ dans le voisinage de l'optimum, alors la méthode multi-unités avec deux unités non identiques telles que définies par (2.2) convergera asymptotiquement et localement si et seulement si le paramètre Δ est choisi tel que :*

$$(\Delta)(\Delta + \beta) > 0 \quad (2.13)$$

Preuve : En appliquant la méthode multi-unités définies par (1.79) et (1.80) au procédé, on obtient :

$$\dot{u} = \frac{-k}{\Delta} (J_2(u_2) - J_1(u_1)) \quad (2.14)$$

Afin d'évaluer la stabilité autour du point d'équilibre (u_1^*, u_2^*) , le Jacobien de la partie droite de l'équation évalué au point d'équilibre est considéré. Le Jacobien \mathcal{J} est donné par :

$$\mathcal{J} = \frac{-k}{\Delta} \left(\frac{\partial J_2}{\partial u} \Big|_{u_2^*} - \frac{\partial J_1}{\partial u} \Big|_{u_1^*} \right) \quad (2.15)$$

En utilisant (2.2), l'équation (2.15) devient :

$$\mathcal{J} = \frac{-k}{\Delta} \left(\frac{\partial J_1}{\partial u} \Big|_{u_2^* + \beta} + \frac{\partial \bar{J}}{\partial u} \Big|_{u_2^* + \beta} - \frac{\partial J_1}{\partial u} \Big|_{u_1^*} \right) \quad (2.16)$$

Une approximation en séries de Taylor de premier ordre autour de u_1^{opt} , mène à l'équivalence suivante :

$$\mathcal{J} \approx \frac{-k}{\Delta} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \Big|_{u_1^{opt}} (u_2^* + \beta - u_1^*) + \frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial u^2} \Big|_{u_1^{opt}} (u_2^* + \beta - u_1^{opt}) \right) \quad (2.17)$$

En considérant la différence de courbure autour de l'optimum comme négligeable, i.e. $\frac{\partial^2 \bar{J}}{\partial u^2} \approx 0$, et en utilisant les expressions $\beta = u_1^{opt} - u_2^{opt}$ et $u_2^* = u_1^* + \Delta$, cette équation devient :

$$\mathcal{J} \approx \frac{-k}{\Delta^2} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right) \Delta (\Delta + \beta) \quad (2.18)$$

Puisque J_1 est définie comme étant une fonction convexe, sa dérivée seconde est définie positive. Avec un choix de $k > 0$, l'expression $\frac{k}{\Delta^2}$ est également positive et la stabilité locale de la méthode multi-unités appliquée à un procédé comportant des unités semblables mais non identiques est donc garantie si et seulement si $\Delta(\Delta + \beta) > 0$. □

La différence de courbure, lorsque non-négligeable, intervient dans la condition de stabilité. Dans ce cas, il est beaucoup plus difficile de prédire la stabilité de la méthode multi-unités.

2.1.4 Exemple illustratif

Dans l'exemple qui suit, l'effet de la présence de courbures différentes dans les courbes statiques des unités d'un procédé sur le point d'équilibre et la condition de convergence est mis en évidence. Il est également démontré que lorsque les courbures sont identiques, les conditions de convergence identifiées auparavant sont obtenues.

Soient les caractéristiques statiques des deux unités du procédé décrites par les équations quadratiques suivantes :

$$J_1(u) = a_1(u)^2 \quad (2.19)$$

$$J_2(u) = a_2(u + b)^2 + c \quad (2.20)$$

Les deux points d'opération optimaux sont donnés par $u_1^{opt} = 0$, $u_2^{opt} = -b$ et $J_1(u_1^{opt}) = 0$, $J_2(u_2^{opt}) = c$ et donc, dans le présent exemple, $\beta = b$ et $\gamma = c$, ce qui donne $\bar{J}(u_1^{opt}) = 0$ et $\bar{J}(u) = (a_2 - a_1)u^2$ pour $u \neq u_1^{opt}$.

Le point d'équilibre de la méthode multi-unités est obtenu en posant $J_1(u^* - \Delta/2) = J_2(u^* + \Delta/2)$. Cette équation mène à la condition suivante :

$$(a_1 - a_2)(u^*)^2 - (a_1\Delta + a_2(\Delta + 2b))u^* + \frac{\Delta^2}{4}(a_1 - a_2) - a_2b(\Delta + b) - c = 0 \quad (2.21)$$

La résolution de cette équation donne deux racines :

$$u^* = \frac{\Delta}{2} + \frac{2a_2(\Delta + b)(1 \pm \sqrt{1 - \alpha})}{2(a_1 - a_2)} \quad (2.22)$$

où $\alpha = -\frac{(a_1 - a_2)((\Delta + b)^2 + c)}{a_2(\Delta + b)^2}$. En utilisant une expansion en série de Taylor, on peut démontrer que :

$$\sqrt{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{2}S(\alpha) \quad (2.23)$$

avec $S(\alpha)$ donné par (voir Annexe II),

$$S(\alpha) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j!}{2^{2j}j!(j+1)!} \alpha^{j-1} \quad (2.24)$$

En utilisant (2.23) dans (2.22) les deux racines, u_{pos}^* et u_{neg}^* deviennent :

$$\begin{aligned} u_{neg}^* &= -\frac{b}{2} - \frac{c}{2a_2(\Delta + b)} + \frac{(\Delta + b)(a_1 - a_2)}{2a_2^3} \left(a_2 + \frac{c}{(\Delta + b)^2} \right)^2 S(\alpha) \\ u_{pos}^* &= \Delta + \frac{2a_2(\Delta + b)}{a_1 - a_2} - u_{neg}^* \end{aligned} \quad (2.25)$$

Notez que u_{neg}^* et u_{pos}^* utilisent respectivement les racines négative et positive. De plus, si $a_1 \rightarrow a_2$, u_{neg}^* est de même forme que (2.12) prédit par la Proposition 2.1.1 alors que $u_{pos}^* \rightarrow \infty$. Donc, le point d'équilibre souhaité est u_{neg}^* , qui est de même forme que (2.12) avec un terme supplémentaire qui est proportionnel à la différence des courbures.

Maintenant, la stabilité locale autour de chacun des points d'équilibre est étudiée. Pour ce faire, le Jacobien est utilisé. Dans le présent exemple, il est donné par,

$$\mathcal{J} = \frac{-k}{\Delta} \left(\frac{\partial J_2}{\partial u} \Big|_{u_2^*} - \frac{\partial J_1}{\partial u} \Big|_{u_1^*} \right) = \frac{-2ka_2}{\Delta^2} \left(\Delta(\Delta + b) - \frac{(a_1 - a_2)}{a_2} (u^* - \frac{\Delta}{2}) \Delta \right) \quad (2.26)$$

La structure générale de la condition de stabilité, $\Delta(\Delta + b)$, est retrouvée alors qu'un terme additionnel relatif à la différence de courbures est également présent. Dans le Théorème 2.1.1, les courbures des deux unités sont considérées comme étant identiques ce qui mène à la condition de stabilité $\Delta(\Delta + b) > 0$, pour $k > 0$.

Toutefois, en remplaçant (2.22) dans (2.26) on obtient :

$$\mathcal{J} = \pm \frac{2ka_2}{\Delta^2} \Delta(\Delta + b) \sqrt{1 - \alpha} \quad (2.27)$$

Puisque par définition, $\frac{2ka_2}{\Delta^2} > 0$ et $\sqrt{1 - \alpha} > 0$, la stabilité dépend du signe de la racine utilisée pour déterminer le point d'équilibre et du signe de $\Delta(\Delta + b)$. De plus, si le point d'équilibre u_{neg}^* est stable, u_{pos}^* est instable et vice-versa. La condition de stabilité de u_{neg}^* , le point d'équilibre souhaité, est alors $\Delta(\Delta + b) > 0$, ce qui revient à la condition du Théorème 2.1.1.

Il est important de souligner que la condition de stabilité est locale. La région de stabilité peut être facilement identifiée dans cet exemple. Elle est donnée par (u_{pos}^*, ∞) si $u_{neg}^* > u_{pos}^*$ ou $(-\infty, u_{pos}^*)$ si $u_{neg}^* < u_{pos}^*$.

Le présent exemple donne lieu aux interprétations suivantes :

1. Si les deux unités ont le même point d'opération optimal, $b = 0$, la condition de stabilité devient $\Delta^2 > 0$, qui est valide pour toute valeur de Δ , ce qui est en accord avec les résultats disponibles (Srinivasan, 2007).
2. La valeur de c n'affecte pas la stabilité, ce qui signifie qu'en présence d'erreur de mesure (déterministe ou stochastique), la convergence n'est pas affectée.

3. Le fait que la condition de stabilité ne soit pas affectée par une différence de courbures ($a_1 - a_2$) dans le présent exemple n'est qu'une pure coïncidence. Toutefois, comme le démontre l'application qui sera présentée à la section suivante, la région de stabilité est réellement affectée par des différences de courbures.
4. La condition de stabilité (2.13) est une équation quadratique comportant deux racines : $\Delta = 0$ et $\Delta = -b$. Deux cas distincts sont présents :
 - Pour $b < 0$, le système sera stable ssi $\Delta < 0$ ou $\Delta > -b$
 - Pour $b > 0$, le système sera stable ssi $\Delta > 0$ ou $\Delta < -b$
 ce qui signifie que le choix d'une valeur de $|\Delta| > |b|$ assurera la stabilité de la méthode multi-unités. Toutefois, si la valeur de Δ est inférieure à cette distance, il faudra porter une attention particulière au signe de Δ .
5. S'il est possible d'identifier le signe de b par une quelconque heuristique (i.e. identifier laquelle des deux unités a le point d'opération optimal le plus petit), alors la convergence peut être assurée par un ajustement adéquat du signe de Δ .
6. Si $c = 0$ et $a_1 = a_2 = a$, le système multi-unités en boucle fermée convergera autour du point $u^* = \frac{-b}{2}$, point qui représente le point optimal moyen des deux unités.
7. Si $b = 0$ et $a_1 = a_2 = a$, alors $u^* = \frac{-c}{2a\Delta}$, ce qui indique que bien que les point optimaux des deux unités soient identiques, la solution peut être bien loin de l'optimum. Également, plus Δ est petit, plus la solution sera éloignée de l'optimum réel.
8. La différence statique entre les deux unités entraînera une erreur d'estimation du gradient par la méthode multi-unités. Dans le cas d'unités identiques, le gradient estimé sera $\hat{g}_I = 2a(u - u^*)$ alors que dans le présent exemple lorsque $a_1 = a_2 = a$, le gradient estimé devient $\hat{g}_{NI} = \frac{2a_1(u - u^*)(\Delta + b)}{\Delta}$. Comme $\frac{\hat{g}_{NI}}{\hat{g}_I} = \frac{(\Delta + b)}{\Delta}$, une même valeur du gain d'adaptation mènera à des temps de

convergence vers le point d'équilibre plus ou moins long selon la valeur de Δ choisie.

2.1.5 Optimisation multi-unités de deux bioréacteurs non identiques

Afin de bien illustrer l'influence de la présence d'unités non identiques sur la convergence de la méthode multi-unités, reprenons le système de bioréacteurs présenté au chapitre précédent tout en prenant soin d'introduire une différence entre les courbes statiques des 2 unités. Pour ce faire, l'unité 1 utilise les mêmes valeurs que précédemment, mais l'unité 2 utilise les valeurs présentées à l'Annexe III. Le point optimal de l'unité 2 est donné par un débit de substrat de $18.4 L/h$ et une productivité de protéines correspondante de $17779 mg/h$. Rappelons que le point d'opération optimal de l'unité 1 correspond à un débit de substrat de $16.9 L/h$ ainsi qu'une productivité de protéines de $15047 mg/h$. Les courbes statiques des deux bioréacteurs sont présentées à la Figure 2.2. Pour une courbure considérée identique autour de l'optimum, les valeurs des paramètres β et γ de l'équation 2.2 sont données par : $\beta = u_1^{opt} - u_2^{opt} \simeq -1.4 L/h$ et $\gamma = J_2^{opt} - J_1^{opt} \simeq 2732 g/h$.

Selon notre analyse, la méthode multi-unités sans correcteurs amènera le système à diverger ou encore à converger vers un point autre que le point d'opération optimal. Les équations (2.12, 2.13) prédisent que cette erreur de convergence dépendra de la valeur et du signe de Δ . Ainsi, dans le cas présent, un choix de $\Delta < 0$ ou $\Delta > 1.4$ devrait assurer la stabilité du système.

Les figures 2.3 à 2.6 montrent les résultats obtenus en appliquant la méthode d'optimisation multi-unités à un tel système avec des valeurs de Δ de $\pm 5 \frac{L}{h}$, et $\pm 1 \frac{L}{h}$. La valeur du gain k_{mu} est encore une fois de $-1.23 \times 10^{-4} \frac{L^2 mg}{h^2}$. Les valeurs initiales de l'unité 1 sont les mêmes que celles présentées au Tableau I.3. Pour l'unité 2, les valeurs initiales ont été fixées afin de simuler un régime permanent avant chaque

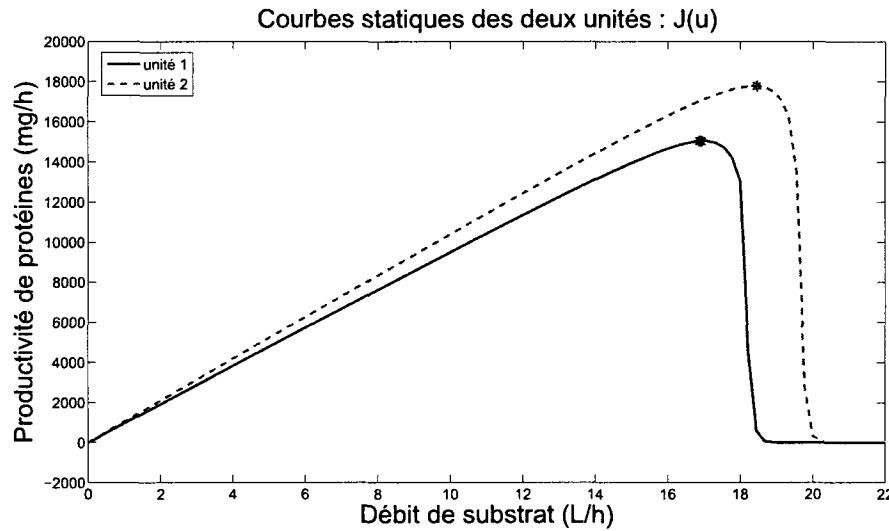


Figure 2.2 Courbes statiques des deux bioréacteurs non identiques

optimisation selon les différentes valeurs de Δ . Les Figures 2.3 et 2.4 montrent les résultats obtenus pour des valeurs négatives de Δ : -5 et -1 respectivement. Puisque $\beta < 0$, le système est stable pour ces valeurs négatives ce qui concorde avec la théorie présentée.

Lorsque le signe de Δ est positif i.e. opposé au signe de β , la stabilité du système est assuré par une valeur de Δ suffisamment grande (voir Figure 2.5 pour $\Delta = 5$) alors qu'une trop petite valeur de Δ rend le système instable (voir Figure 2.6, pour $\Delta = 1$). Le fait qu'une valeur de $\Delta = 1$ amène les bioréacteurs en *lavage* peut s'expliquer intuitivement comme suit : un point d'opération (q_1, q_2) est recherché permettant à l'unité 1 et l'unité 2 d'avoir une même valeur de sortie ($J_1 = J_2$) avec une différence de débit de 1 L/h (i.e. : $q_2 = q_1 + \Delta$). La Figure 2.2 indique clairement qu'un tel point n'existe pas et la recherche de ce point mène au *lavage*.

Les performances des simulations effectuées avec ces valeurs de Δ sont résumées au

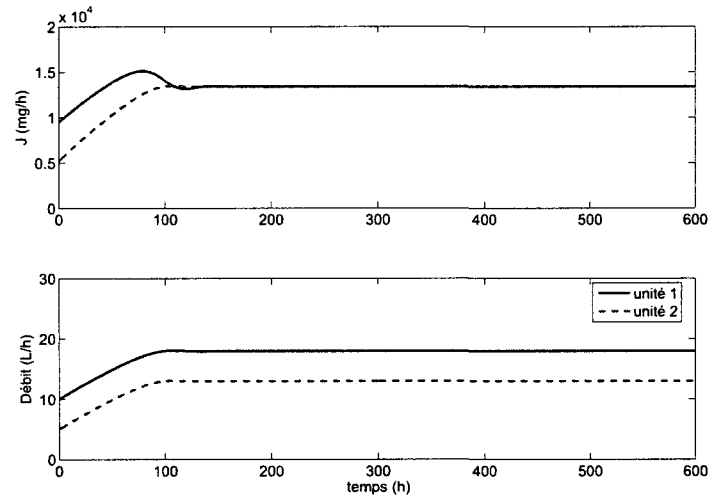


Figure 2.3 Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités : $\Delta = -5 \text{ L/h}$

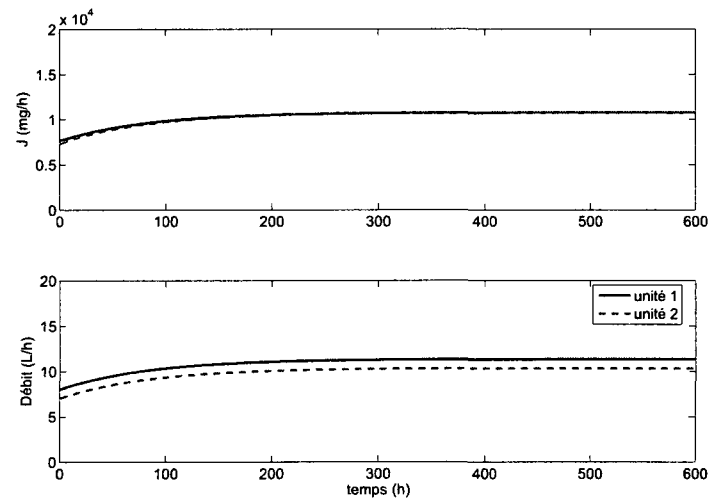


Figure 2.4 Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités : $\Delta = -1 \text{ L/h}$

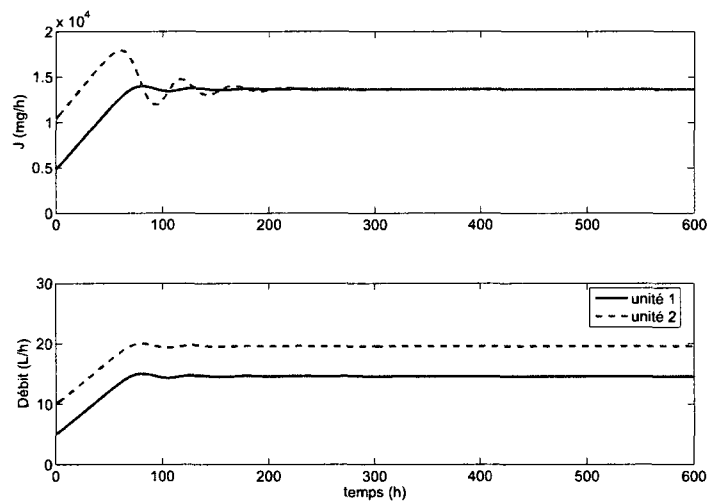


Figure 2.5 Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités : $\Delta = 5$ L/h

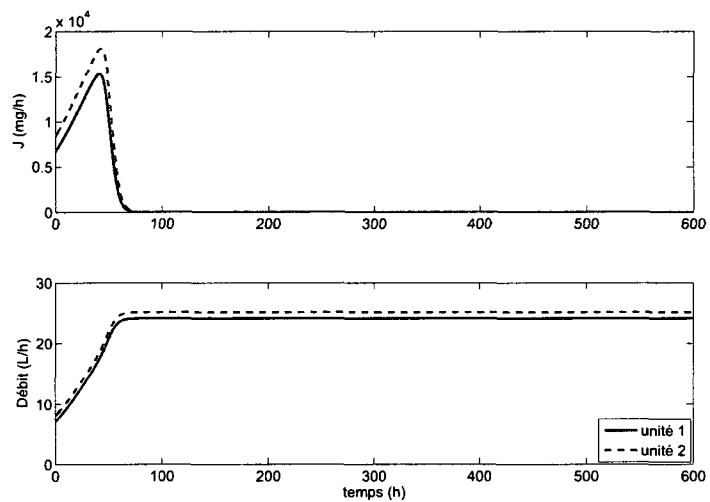


Figure 2.6 Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités : $\Delta = 1$ L/h

Tableau 2.1.

Tableau 2.1 Comparaison des performances obtenues avec différentes valeurs de Δ

Δ [L/h]	\bar{q}^* [L/h]	q_1^* [L/h]	q_2^* [L/h]	J [mg/h]	Time [h]
-5	15.5	18	13	13396	130
5	17.1	14.6	19.6	13640	250
-1	10.8	11.3	10.3	10744	250
1	-	-	-	-	-

Cet exercice démontre que la région d'instabilité existe comme le prédit la théorie. Toutefois, la limite de la région d'instabilité n'est pas exactement déterminée par $\Delta = -\beta$, mais bien par une valeur supérieure. Ceci peut s'expliquer par le fait que dans la présente application, l'hypothèse de courbures identiques pour les deux unités n'est pas vérifiée, surtout pour des points d'opération loin de l'optimum. De plus, plusieurs simulations avec différentes valeurs de gain (k_{mu}) ont permis de vérifier que la grandeur de la région d'instabilité dépend de la valeur du gain. Comme le montrent les résultats du Tableau 2.1, un même gain mène à des temps de convergence différents selon la valeur de Δ utilisée (250 heures pour $\Delta = -1$ opposé à 130 heures pour $\Delta = -5$). Comme mentionné dans les remarques de la section 2.1.4, cette variabilité du temps de convergence provient de la dépendance de l'erreur d'estimation du gradient (induite par la présence de β et γ) au paramètre Δ . Ainsi, un même gain pour différentes valeurs de Δ mène à des réponses plus ou moins rapides/oscillantes.

Les résultats du Tableau 2.1 confirment également l'influence du choix de Δ sur le point d'équilibre tel que le décrit l'équation (2.12). La Figure 2.7 montre la relation entre le point d'équilibre obtenue par chaque unité (soit la production de protéines), en fonction de la valeur de Δ utilisée. Les points de cette courbe peuvent être calculés directement à partir de la Figure 2.2, en choisissant une valeur donnée de Δ et en trouvant les points satisfaisant la condition $J_1(u) = J_2(u + \Delta)$. A partir de cette figure, on trouve que des valeurs de $\Delta^* = -2.2 L/h$ ou $\Delta^* = 2.5 L/h$ donnent une

productivité de protéines globale maximale ce qui correspond au point d'opération optimal de l'unité 1 (soit le plus petit point optimal des unités présentées à la Figure 2.2).

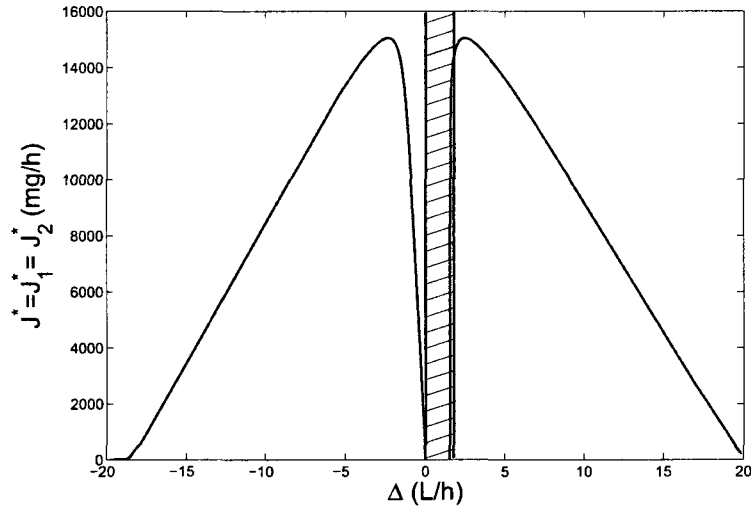


Figure 2.7 Valeurs optimales de productivité de protéines obtenues selon différentes valeurs de Δ

L'analyse de stabilité avait bien prédit la présence d'une zone d'instabilité pour de faibles valeurs de Δ de signe opposé à β . Comme en témoignent les résultats de simulation, la zone d'instabilité est plus large que celle prédite par la théorie. Il serait donc préférable d'ajuster le signe de Δ en fonction du signe de β . Dans le cas des bioréacteurs, le signe de β peut être déterminé en comparant la concentration de biomasse de chaque bioréacteur : plus la concentration de biomasse est élevée, plus grande sera la valeur optimale de débit de substrat. Un choix du signe de Δ fait conformément à cette simple observation assurera la stabilité du système en boucle fermée, peu importe sa valeur. Toutefois, ce choix n'assure pas que le point d'équilibre correspondra au point optimal d'opération réel.

2.2 Méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle

Comme le démontrent les résultats présentés à la section précédente, l'application de la méthode multi-unités à un procédé comportant des unités non identiques peut amener le système à diverger ou encore à converger vers des points d'équilibre très loin des valeurs optimales réelles des unités, tout spécialement lorsque $\gamma \neq 0$. Dans la présente section, une modification à la méthode multi-unités est proposée afin de parer cette lacune. Cette modification consiste à introduire des correcteurs adaptatifs dans la boucle multi-unités afin de corriger l'erreur de convergence engendrée par des différences dans les courbes statiques telles que définies par l'équation 2.2.

Cette erreur de convergence est le résultat d'une mauvaise estimation du gradient selon la méthode multi-unités et elle peut être éliminée en introduisant deux correcteurs adaptatifs.

La figure 2.8 montre la structure de la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle pour un procédé contenant 2 unités. Le correcteur $\hat{\beta}$ est appliquée à l'entrée u_2 de la seconde unité afin de ramener les deux unités sur le même axe en entrée. Le correcteur $\hat{\gamma}$, agit sur la fonction objectif J_2 de la seconde unité, dans le but cette fois de ramener les deux courbes sur le même axe en sortie.

L'idée principale derrière la définition des lois de commande des correcteurs à adaptation séquentielle est d'alterner entre la méthode multi-unités et la mise à jour des correcteurs en utilisant deux signaux de perturbation différents : d_{mu} pour la méthode multi-unités et d_{corr} pour l'adaptation des correcteurs (Figure 2.9). Les deux signaux de perturbation sont périodiques de période, $T = T_1 + T_2$. Notez que cette figure présente un seul cycle de perturbation pour l'adaptation des correcteurs bien que plusieurs cycles puissent être nécessaires. De plus, la figure présente une onde

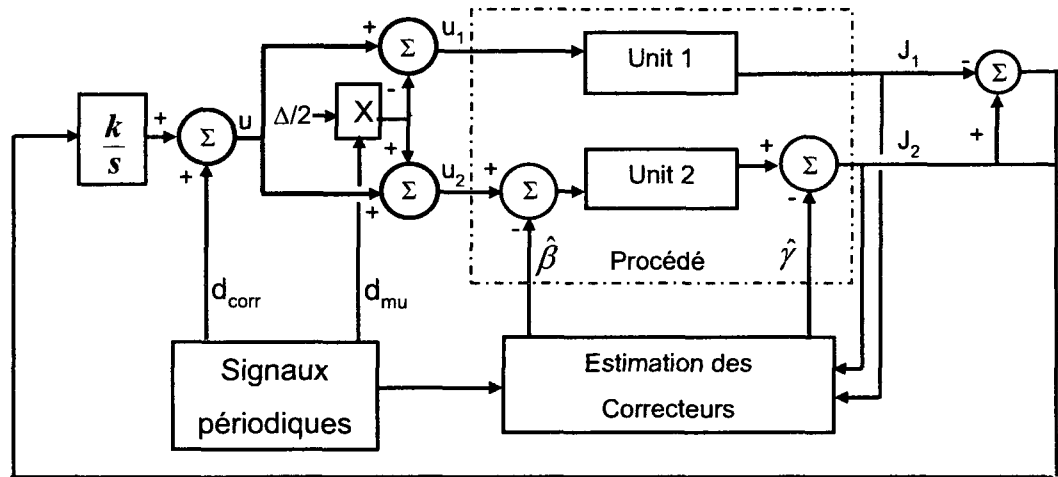


Figure 2.8 Structure de la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle

carrée mais l'utilisation d'un signal sinusoïdal peut également être envisagé.

Les lois d'adaptation sont formulées à partir des idées suivantes. Durant la période de correction, l'écart entre les deux entrées, Δ , est éliminé et les unités sont amenées au même point d'opération (corrigé par $\hat{\beta}$ si nécessaire). Pour un même point d'opération, les valeurs de sorties des deux unités devraient être les mêmes si le correcteur agissant en sortie ($\hat{\gamma}$) est calculé correctement. Donc, la différence entre les sorties corrigées permet de formuler la loi d'adaptation pour le correcteur $\hat{\gamma}$. De plus, les gradients des deux unités au même point d'opération devraient être les mêmes si la différence ($\hat{\beta}$) est compensée adéquatement. La loi d'adaptation du correcteur ($\hat{\beta}$) est donc définie afin d'éliminer la différence entre les gradients des deux unités. Ces gradients sont estimés en utilisant la méthode de perturbation.

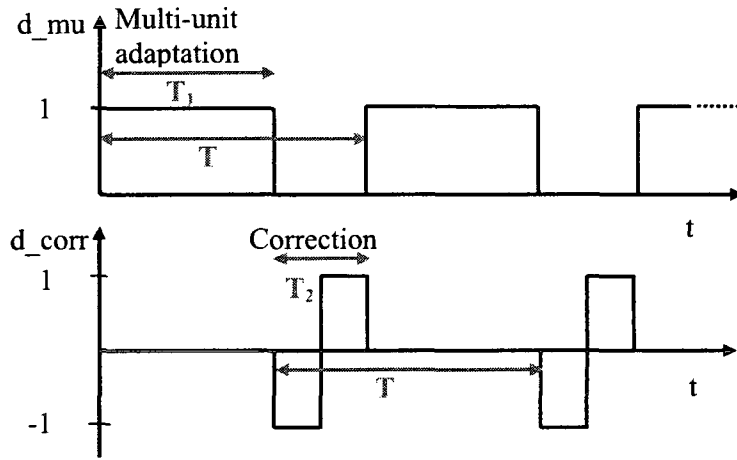


Figure 2.9 Signaux de perturbations pour la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle

2.2.1 Introduction de correcteurs à adaptation séquentielle dans la méthode d'optimisation multi-unités

Soient les deux unités définies par (2.2) avec $\bar{J} = 0$. La méthode multi-unités est modifiée pour inclure les correcteurs à adaptation séquentielle. Les entrées des deux unités sont alors définies par :

$$u_1 = u - \frac{\Delta}{2} d_{mu} + a d_{corr} \quad (2.28)$$

$$u_2 = u + \frac{\Delta}{2} d_{mu} + a d_{corr} - \hat{\beta} \quad (2.29)$$

et les lois d'adaptation de l'optimisation multi-unités et des correcteurs $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont données par :

$$\dot{u} = -\frac{k_{mu}}{\Delta}(J_2 - J_1 - \hat{\gamma}) d_{mu} \quad (2.30)$$

$$\dot{\hat{\beta}} = \frac{k_{\beta}}{a}(J_2 - J_1 - \hat{\gamma}) d_{corr} \quad (2.31)$$

$$\dot{\hat{\gamma}} = k_{\gamma}(J_2 - J_1 - \hat{\gamma}) (1 - d_{mu}) \quad (2.32)$$

où, k_{mu} , k_{β} et k_{γ} sont des valeurs positives constantes.

2.2.2 Équilibre de la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle

Les signaux de perturbation utilisés (Fig. 2.9) étant périodiques de période T et considérant l'hypothèse selon laquelle les gains d'adaptation sont petits et bornés, i.e. $k_{mu} < \alpha_1$, $k_{\beta} < \alpha_2$ et $k_{\gamma} < \alpha_3$ avec $0 < \alpha_i < \infty$, $\forall i = 1, 2, 3$, la méthode de moyennage telle que décrite dans Khalil (1996) peut s'appliquer au système décrit par (2.30)-(2.32). Le système moyenné est représenté par :

$$\dot{\hat{\beta}} = \frac{k_{\beta}}{Ta} I_{\beta}, \quad I_{\beta} = \int_0^T D d_{corr} dt \quad (2.33)$$

$$\dot{\hat{\gamma}} = \frac{k_{\gamma}}{T} I_{\gamma}, \quad I_{\gamma} = \int_0^T D (1 - d_{mu}) dt \quad (2.34)$$

$$\dot{u} = \frac{-k_{mu}}{T\Delta} I_u, \quad I_u = \int_0^T D d_{mu} dt \quad (2.35)$$

où $D = (J_2(u_2) - J_1(u_1) - \hat{\gamma})$. Comme les signaux d_{corr} et d_{mu} sont nuls durant les périodes $[0, T_1]$ et $[T_1, T]$ respectivement,

$$I_\beta = \int_{T_1}^T D d_{corr} dt \quad (2.36)$$

$$I_\gamma = \int_{T_1}^T D dt \quad (2.37)$$

$$I_u = \int_0^{T_1} D dt \quad (2.38)$$

En utilisant l'équation (2.2) avec $\bar{J} = 0$, l'expression de D devient :

$$D = (J_1(u_1 + \beta) + \gamma - J_1(u_1) - \hat{\gamma}) \quad (2.39)$$

Le point d'équilibre moyen étant noté $(\hat{\beta}^e, \hat{\gamma}^e, u^e)$, l'expansion en séries de Taylor du second ordre de D autour du point u^e est donné par,

$$\begin{aligned} D = & \gamma - \hat{\gamma} + \left. \frac{\partial J_1}{\partial u} \right|_{u^e} (u_2 + \beta - u_1) \\ & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}^e} (u_2 + \beta - u_1)(u_1 + u_2 + \beta - 2u^e) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Cette expansion est exacte si la dérivée seconde est évaluée à un point intermédiaire \bar{u}^e . Durant l'intervalle $[T_1, T]$, $(u_2 + \beta - u_1) = \hat{\beta} - \beta$ et $(u_1 + u_2 + \beta - 2u^e) = \beta - \hat{\beta} + 2ad_{corr} + 2(u - u^e)$. Donc, l'expression I_β peut s'écrire comme suit,

$$\begin{aligned} I_\beta = & \int_{T_1}^T \left(\gamma - \hat{\gamma} + \left. \frac{\partial J_1}{\partial u} \right|_{u^e} (\beta - \hat{\beta}) \right) d_{corr} \\ & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}^e} \left((\beta - \hat{\beta})(\beta - \hat{\beta} + 2(u - u^e))d_{corr} + 2a(\beta - \hat{\beta})d_{corr}^2 \right) dt \end{aligned} \quad (2.41)$$

En observant le signal d_{corr} , on constate que :

$$\int_{T_1}^T (d_{corr} dt) = 0 \quad (2.42)$$

$$\int_{T_1}^T (d_{corr}^2 dt) = T_2 \quad (2.43)$$

Ce qui mène à,

$$I_\beta = T_2 \left. \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}^e} a(\beta - \hat{\beta}) \quad (2.44)$$

Avec un raisonnement similaire, il peut être montré que,

$$I_\gamma = T_2 \left(\gamma - \hat{\gamma} + \left. \frac{\partial J_1}{\partial u} \right|_{u^e} (\beta - \hat{\beta}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}^e} (\beta - \hat{\beta})(\beta - \hat{\beta} + 2(u - u^e)) \right) \quad (2.45)$$

Durant l'intervalle $[0, T_1]$, $(u_2 + \beta - u_1) = \beta - \hat{\beta} + \Delta$ et $(u_1 + u_2 + \beta - 2u^e) = \beta - \hat{\beta} + 2(u - u^e)$. L'expression I_u devient,

$$\begin{aligned} I_u = T_1 & \left(\gamma - \hat{\gamma} + \left. \frac{\partial J_1}{\partial u} \right|_{u^e} (\beta - \hat{\beta} + \Delta) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}^e} (\beta - \hat{\beta} + 2(u - u^e))(\beta - \hat{\beta} + \Delta) \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Le système moyenné s'exprime par les équations suivantes :

$$\dot{\hat{\beta}} = \frac{k_\beta}{T} T_2 \left. \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}^e} (\beta - \hat{\beta}) \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\gamma}} = & \frac{k_\gamma}{T} T_2 \left(\gamma - \hat{\gamma} + \left. \frac{\partial J_1}{\partial u} \right|_{u^e} (\beta - \hat{\beta}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}^e} (\beta - \hat{\beta})(\beta - \hat{\beta} + 2(u - u^e)) \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{u} = & \frac{-k_{mu}}{T\Delta} T_1 \left(\gamma - \hat{\gamma} + \left. \frac{\partial J_1}{\partial u} \right|_{u^e} (\beta - \hat{\beta} + \Delta) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}^e} (\beta - \hat{\beta} + 2(u - u^e))(\beta - \hat{\beta} + \Delta) \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Il sera maintenant démontré que les points optimaux souhaités, i.e $u_1^e = u_1^{opt} \pm \Delta$ et $u_2^e = u_2^{opt} \pm \Delta$ sont atteints par la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle.

Théorème 2.2.1. *En moyenne, l'équilibre du système (2.28)-(2.32), i.e. l'équilibre de (2.33)-(2.35), $(\hat{\beta}^e, \hat{\gamma}^e, u^e)$ est donné par $\hat{\beta}^e = \beta$, $\hat{\gamma}^e = \gamma$ et $u^e = u_1^{opt}$, où u_1^{opt} est le point d'opération optimal réel de l'unité 1.*

Preuve :

Le point d'équilibre du système moyenné $(\hat{\beta}^e, \hat{\gamma}^e, u^e)$ va satisfaire $I_\beta = I_\gamma = I_u = 0$. Puisque la dérivée seconde est positive par convexité, de (2.44), $I_\beta = 0$ conduit à,

$$\hat{\beta}^e = \beta$$

En utilisant cette équivalence dans (2.45), $I_\gamma = 0$ conduit à,

$$\hat{\gamma}^e = \gamma$$

En utilisant ces deux expression dans (2.46) et en remarquant que le terme $u - u^e$ est nul à l'équilibre, $I_u = 0$ donne $\left. \frac{\partial J_1}{\partial u} \right|_{u^e} \Delta = 0$, ce qui conduit finalement à,

$$u^e = u_1^{opt}$$

le point d'opération optimal de l'unité 1. \square

2.2.3 Stabilité de la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle

Dans les paragraphes qui suivent, la stabilité locale de l'évolution dynamique moyennée du système est analysée.

Théorème 2.2.2. *La moyenne du système (2.28)-(2.32), i.e. (2.33)-(2.35), est localement asymptotiquement stable.*

Preuve :

Le Jacobien de (2.33)-(2.35) évalué au point $(\hat{\beta}^e, \hat{\gamma}^e, u^e)$ est donné par :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} -2k_\beta T_2 K & 0 & 0 \\ 0 & -k_\gamma T_2 & 0 \\ k_{mu} T_1 K & \frac{k_{mu}}{\Delta} T_1 & -2T_1 k_{mu} K \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

où $K \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \Big|_{\bar{u}^e}$. Les valeurs propres de (2.50) sont les trois éléments de la diagonale puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire inférieure. Comme $k_{mu}, k_\beta, k_\gamma > 0$ par choix et $K > 0$ par convexité, la matrice Jacobienne de (2.50) est Hurwitz et la moyenne du système est localement asymptotiquement stable. \square

Quoiqu'il s'agisse d'un résultat important, il faut bien comprendre que le système n'est stable que localement. L'utilisation de très grandes valeurs de gain pour des points d'opération initiaux très loin des points optimaux peut amener le système à diverger.

2.2.4 Optimisation de deux bioréacteurs non identiques par la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle

La méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle telle que décrite par les équations (2.28-2.32) a été appliquée aux deux bioréacteurs de la Figure 2.2. Les paramètres d'ajustement de la méthode sont présentés à l'Annexe IV. Ici, la perturbation d_{corr} utilisée est une sinusoïdale, i.e. $d_{corr} = a \sin(\omega t)$. La période T_2 ainsi que la fréquence ω sont choisies de telle sorte à obtenir 3 cycles de ce signal sinusoïdal durant la période d'adaptation des correcteurs.

Le signe approprié de Δ est utilisé afin d'éviter une divergence initiale. La Figure 2.10 montre les résultats obtenus : les deux bioréacteurs convergent à leur points d'opération optimaux respectifs en 800 heures environ. Les oscillations autour des valeurs finales sont un effet direct de l'utilisation du signal de perturbation sinusoïdal pour le calcul des correcteurs. La Figure 2.11 montre l'évolution des correcteurs $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$. L'augmentation du temps de convergence de 150-250 heures (pour la méthode multi-unités sans correcteurs) à 900 heures (avec les correcteurs) est principalement le temps requis pour l'estimation des correcteurs. Ce temps de convergence peut toutefois être réduit en fournissant de meilleures conditions initiales pour les correcteurs si la connaissance du système le permet. Si la valeur initiale de β peut s'avérer plus difficile à évaluer, une estimation de la valeur initiale de γ peut être obtenue en évaluant l'écart entre la valeur de la fonction objectif de chacune des unités au même point d'opération. La possibilité d'obtenir une valeur initiale pour le correcteur γ constitue un avantage par rapport à la méthode de perturbations qui se manifeste par une amélioration de la vitesse de convergence.

Le temps de convergence de la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle dépend de l'amplitude des différences entre les unités : plus les

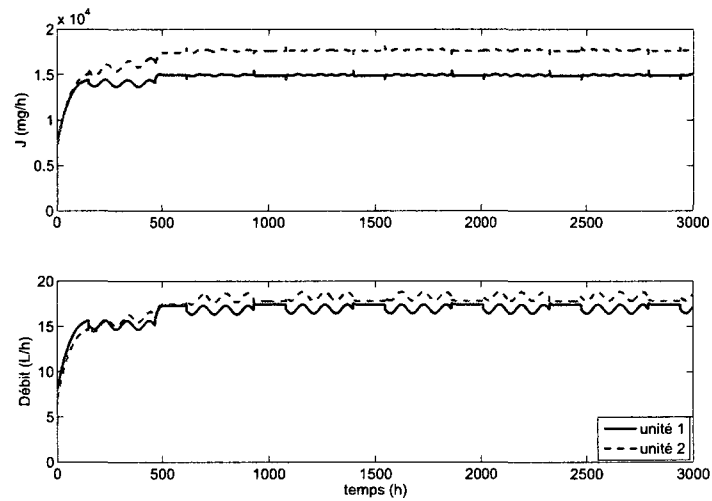


Figure 2.10 Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle : évolution des entrées et sorties

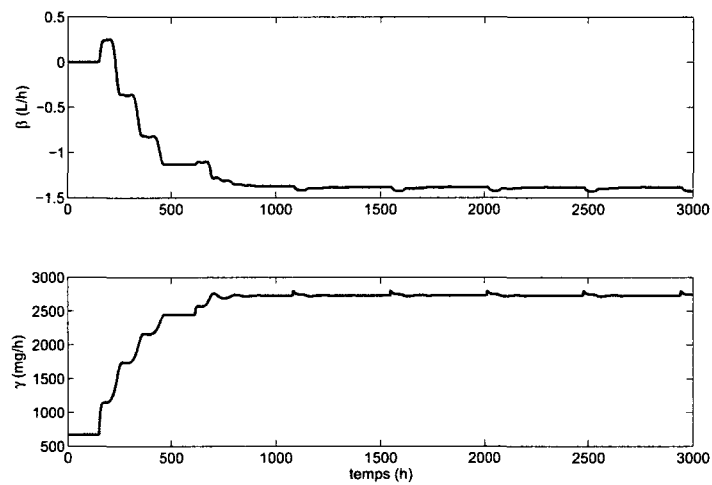


Figure 2.11 Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle : évolution des correcteurs

unités seront semblables, plus la convergence sera rapide. Les résultats du Tableau 2.2 montrent clairement que le temps de convergence augmente plus les différences entre les unités sont importantes. Ainsi, la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle peut présenter des temps de convergence plus long que la méthode de perturbations lorsque les différences entre les unités du procédé sont très significatives.

Tableau 2.2 Temps de convergence de la méthode multi-unités avec correcteurs pour différentes valeurs de μ_{max} et $Y_{X/S}$ pour l'unité 2.

$\mu_{max_2} (h^{-1})$	$Y_{X/S_2} (gX/gS)$	$\beta (L/h)$	$\gamma (mg/h)$	Temps de convergence (h)
0.925	0.35	0	0	100
0.955	0.37	-0.7	1087	500
0.975	0.385	-1.1	1860	700
1	0.4	-1.6	2734	900

Une difficulté d'application à la méthode multi-unités est certainement le défi que représente un ajustement adéquat des gains des correcteurs $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$. Dans un cas idéal où les courbures sont identiques, l'équation (2.47) montre que la convergence de β est indépendante de γ et le gain k_β peut alors être ajusté séparément. Mais même dans une telle situation, les dynamiques de $\hat{\gamma}$ données par (2.49) dépendent des dynamiques de $\hat{\beta}$ et doivent être ajustées en conséquence. De plus, dans le cas présent, les courbures ne sont pas identiques et il y a beaucoup d'interaction entre les deux correcteurs. En fait, une convergence plus rapide de $\hat{\gamma}$ ralentit la convergence de $\hat{\beta}$. Donc, comme règle du pouce, les gains sont choisis de telle sorte à ce que les deux correcteurs convergent dans le même intervalle de temps.

Dans l'exemple des bioréacteurs, l'ajustement des gains des correcteurs contient un défi supplémentaire. Comme la différence de courbures des deux unités varie en fonction du point d'opération u , les valeurs de $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ ne peuvent être bien estimées loin de l'optimum. C'est donc l'alternance entre l'adaptation multi-unités et les correcteurs qui permet une convergence vers les points d'équilibre souhaités. Ainsi, pour

une région loin de l'optimum réel, l'adaptation des correcteurs doit être interrompue afin de permettre une bonne correction. L'ajustement des gains k_β et k_γ dépend donc du choix fait quant au moment d'interruption de l'adaptation des correcteurs.

2.3 Méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée

Dans la section précédente, l'adaptation des correcteurs est découplée de celle de l'optimisation. Ce découplage est nécessaire puisque les correcteurs requièrent les valeurs des fonctions objectif à un même point d'opération alors que l'optimisation nécessite des points d'opération différents (d'une valeur de Δ) pour l'estimation du gradient. L'adaptation simultanée des correcteurs et de l'optimisation soulève la question suivante : comment obtenir simultanément les valeurs de sortie des deux unités pour un même point d'opération et les valeurs de sortie de ces mêmes unités à des points d'opération différents de Δ ? Clairement, la réponse à cette question est donnée par l'utilisation d'un modèle.

2.3.1 Introduction de correcteurs à adaptation simultanée dans la méthode d'optimisation multi-unités

L'optimisation multi-unités avec adaptation simultanée des correcteurs nécessite une hypothèse supplémentaire soit que la fonction objectif puisse être modélisée par une fonction quadratique, i.e.,

$$J_m = \phi^T \theta \quad \text{avec} \quad \phi^T = [1 \quad u \quad u^2] \quad (2.51)$$

L'hypothèse selon laquelle les fonctions J_1 et J_2 possèdent la même courbure autour de l'optimum est également maintenue. Les fonctions objectif de chacune des unités sont modélisées par :

$$J_{m1}(u_1) = \theta_{1a}u_1^2 + \theta_{1b}u_1 + \theta_{1c} \quad (2.52)$$

$$J_{m2}(u_2) = \theta_{2a}u_2^2 + \theta_{2b}u_2 + \theta_{2c} \quad (2.53)$$

La structure de la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée est présentée à la figure 2.12.

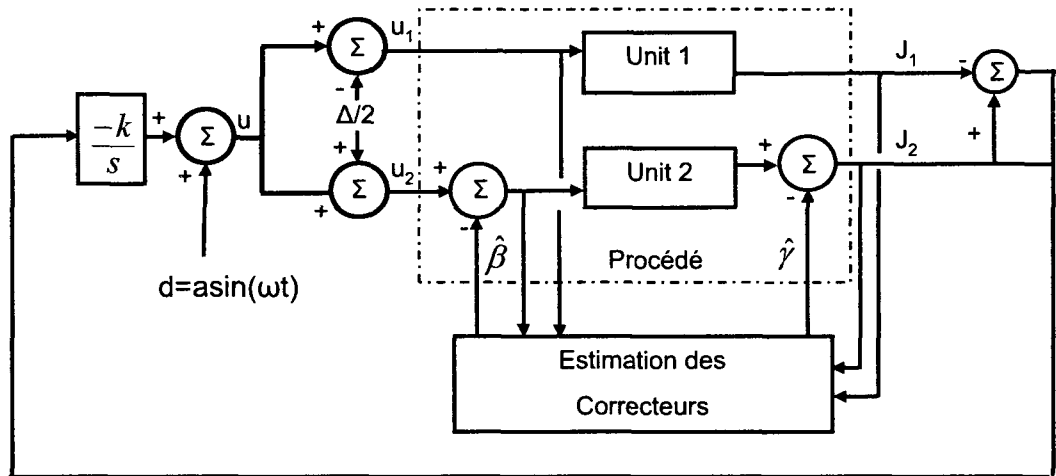


Figure 2.12 Structure de la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée

Une perturbation temporelle persistente de fréquence ω est superposée à l'entrée u du système et les valeurs des correcteurs $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont calculées à partir des valeurs estimées des paramètres $\theta^T = [\theta_1^T \theta_2^T]$. Ces paramètres sont estimés par un algorithme de type moindres carrés récurrents (RLS) avec facteur d'oubli dont les lois d'adaptation sont données par :

$$\dot{\hat{R}} = \Phi^T \Phi - \lambda \hat{R} \quad (2.54)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{R}^{-1} \Phi (J - \Phi^T \hat{\theta}) \quad (2.55)$$

où, \hat{R} est la matrice de corrélation et λ , le facteur d'oubli. Il est supposé que l'excitation est suffisante pour estimer les paramètres $\hat{\theta}$ du modèle, i.e. $\delta_1 I < R < \delta_2 I$ avec $\delta_2 > \delta_1 > 0$.

L'optimisation se fait selon la méthode d'optimisation multi-unités,

$$u_1 = u - \frac{\Delta}{2} + a \sin(\omega t) \quad (2.56)$$

$$u_2 = u + \frac{\Delta}{2} - \hat{\beta} + a \sin(\omega t) \quad (2.57)$$

$$\dot{u} = -\frac{k_{mu}}{\Delta} (J_2 - J_1 - \hat{\gamma}) \quad (2.58)$$

simultanément à l'adaptation des correcteurs $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ répondant aux lois suivantes :

$$\dot{\hat{\beta}} = k_{\beta} (\hat{u}_1^{opt} - \hat{u}_2^{opt} - \hat{\beta}) \quad (2.59)$$

$$\dot{\hat{\gamma}} = k_{\gamma} (\hat{J}_2(\hat{u}_2^{opt}) - \hat{J}_1(\hat{u}_1^{opt}) - \hat{\gamma}) \quad (2.60)$$

où \hat{u}_1^{opt} et \hat{u}_2^{opt} représentent les points d'opération optimaux des modèles des unités 1 et 2 respectivement. Ces lois de commande sont inspirées de la définition même de β et γ données par les équations (2.3) et (2.4). Ces équations peuvent être réécrites en fonction des paramètres $\hat{\theta}$:

$$\dot{\hat{\beta}} = k_{\beta} \left(\frac{\hat{\theta}_{b2}}{2\hat{\theta}_{a2}} - \frac{\hat{\theta}_{b1}}{2\hat{\theta}_{a1}} - \hat{\beta} \right) \quad (2.61)$$

$$\dot{\hat{\gamma}} = k_{\gamma} \left(\frac{\hat{\theta}_{b1}^2}{4\hat{\theta}_{a1}} + \hat{\theta}_{c1} - \frac{\hat{\theta}_{b2}^2}{4\hat{\theta}_{a2}} + \hat{\theta}_{c2} - \hat{\gamma} \right) \quad (2.62)$$

2.3.2 Analyse de convergence de la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée

Dans les paragraphes qui suivent, la stabilité du point d'équilibre de la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée telle que décrite à la section précédente sera analysée.

Théorème 2.3.1. *Considérant l'hypothèse selon laquelle la matrice de corrélation est bornée, i.e. $\delta_1 I < R < \delta_2 I$ avec $0 < \delta_1 < \delta_2$, il est possible de choisir les paramètres de réglages k_{mu} , k_{β} et k_{γ} de telle sorte à ce que le point d'équilibre du système décrit par les équations (2.56-2.55) donné par $u^e = u_1^{opt}$, $\hat{\beta} = \beta$ et $\hat{\gamma} = \gamma$ soit localement asymptotiquement stable.*

Preuve :

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}w_1(u - u^e)^2 + \frac{1}{2}w_2\tilde{\beta}^2 + \frac{1}{2}w_3\tilde{\gamma}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T R \tilde{\theta} \quad (2.63)$$

Où w_1, w_2 et $w_3 > 0$ et $\tilde{\beta} \equiv \hat{\beta} - \beta$, $\tilde{\gamma} \equiv \hat{\gamma} - \gamma$ et $\tilde{\theta} \equiv \hat{\theta} - \theta$. Ainsi, $V \geq 0$ et $V = 0$ lorsque $u = u^e$, $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma} = \tilde{\theta} = 0$. Selon la définition de $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, et $\tilde{\theta}$, les équivalences

suivantes sont respectées :

$$\dot{\tilde{\beta}} = \dot{\hat{\beta}} \quad (2.64)$$

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \dot{\hat{\gamma}} \quad (2.65)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}} \quad (2.66)$$

La dérivée temporelle de cette fonction de Lyapunov est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{V} = w_1(u - u^e)\dot{u} + w_2\tilde{\beta}\dot{\tilde{\beta}} + w_3\tilde{\gamma}\dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{\theta}^T R \dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}^T \dot{R} \tilde{\theta} \quad (2.67)$$

La non-linéarité des expressions de $\dot{\tilde{\beta}}$, $\dot{\tilde{\gamma}}$ et \dot{u} introduira des termes d'ordre supérieur à 2 dans l'expression de \dot{V} . Puisque la preuve de convergence fournie est valide localement, ces termes seront négligés (Khalil, 1996).

Toujours sous l'hypothèse que les caractéristiques statiques des deux unités possèdent la même courbure, soit $\theta_{1a} = \theta_{2a}$, la loi de commande (2.61) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\dot{\tilde{\beta}} = \dot{\hat{\beta}} = k_{\beta} \left(\frac{\theta_{1b} - \tilde{\theta}_{1b}}{2(\theta_{1a} + \tilde{\theta}_{1a})} - \frac{\theta_{2b} - \tilde{\theta}_{2b}}{2(\theta_{1a} + \tilde{\theta}_{2a})} - \hat{\beta} \right) \quad (2.68)$$

En utilisant l'équivalence $\hat{\beta} = \tilde{\beta} + \beta$ et en réorganisant, on obtient :

$$\dot{\tilde{\beta}} = k_{\beta} \left(-\tilde{\beta} - \frac{\tilde{\theta}_{2a}\beta - \frac{\tilde{\theta}_{2b}}{2}}{\theta_{1a} + \tilde{\theta}_{2a}} - \frac{\tilde{\theta}_{1b}}{2(\theta_{1a} + \tilde{\theta}_{1a})} + \frac{\theta_{1b}(\tilde{\theta}_{1a} - \tilde{\theta}_{2a})}{2(\theta_{1a} + \tilde{\theta}_{1a})(\theta_{1a} + \tilde{\theta}_{2a})} \right) \quad (2.69)$$

Un développement en série de Taylor du 2ième ordre de l'expression $\frac{1}{\theta_{1a} + \tilde{\theta}_{2a}}$ donne :

$$\frac{1}{\theta_{1a} + \tilde{\theta}_{2a}} = \frac{1}{\theta_{1a}} \left(\frac{1}{1 + \frac{\tilde{\theta}_{2a}}{\theta_{1a}}} \right) \quad (2.70)$$

$$\approx \frac{1}{\theta_{1a}} \left(1 - \frac{\tilde{\theta}_{2a}}{\theta_{1a}} + \frac{\tilde{\theta}_{2a}^2}{\theta_{1a}^2} \right) \quad (2.71)$$

En utilisant cette expression et en négligeant les termes de 2ième ordre, on obtient :

$$\dot{\tilde{\beta}} \approx k_\beta \left(-\tilde{\beta} - \frac{\tilde{\theta}_{2a}\beta - \frac{\tilde{\theta}_{2b}}{2}}{\theta_{1a}} - \frac{\tilde{\theta}_{1b}}{2\theta_{1a}} + \frac{\theta_{1b}(\tilde{\theta}_{1a} - \tilde{\theta}_{2a})}{2\theta_{1a}^2} \right) \quad (2.72)$$

Avec un raisonnement similaire, on obtient également :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\gamma}} \approx & k_\gamma \left(-\tilde{\gamma} + \tilde{\theta}_{2a}\beta^2 - \frac{\beta(\tilde{\theta}_{2b}\theta_{1a} - \tilde{\theta}_{2a}\theta_{1b})}{\theta_{1a}} \right. \\ & \left. + \frac{\theta_{1b}(\tilde{\theta}_{1b} - \tilde{\theta}_{2b})}{2\theta_{1a}} + \frac{\theta_{1b}^2(\tilde{\theta}_{2a} - \tilde{\theta}_{1a})}{4\theta_{1a}^2} + \tilde{\theta}_{2c} - \tilde{\theta}_{1c} \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

En utilisant l'équation (2.2) dans l'équation (2.58) et en utilisant les équivalences

$\hat{\beta} = \tilde{\beta} + \beta$ et $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma} + \gamma$ on obtient :

$$\dot{u} = \frac{-k_{mu}}{\Delta} \left(J_1(u + \frac{\Delta}{2} - \tilde{\beta}) - J_1(u - \frac{\Delta}{2}) - \tilde{\gamma} \right) \quad (2.74)$$

Une expansion en série de Taylor du 2ième ordre autour du point u_e mène à :

$$\dot{u} \approx -k_{mu} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2}(u - u_e) + \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \left(\frac{\tilde{\beta}^2}{2\Delta} - \tilde{\beta} \frac{(u - u_e)}{\Delta} + \frac{\tilde{\beta}}{4} \right) - \frac{\tilde{\gamma}}{2\Delta} \right) \quad (2.75)$$

En ne conservant que la partie linéaire, on obtient :

$$\dot{u} \approx -k_{mu} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} (u - u_e) + \frac{\partial^2 J_1}{\partial u^2} \left(\frac{\tilde{\beta}}{4} \right) + k_{mu} \frac{\tilde{\gamma}}{2\Delta} \right) \quad (2.76)$$

En utilisant les équations (2.72), (2.73) et (2.76), l'expression de la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -A(u - u_e)^2 - B\tilde{\beta}^2 - C\tilde{\gamma}^2 - \lambda \tilde{\theta}^T R \tilde{\theta} \\ & + D\tilde{\gamma}(u - u_e) + E\tilde{\beta}(u - u_e) + F^T \tilde{\theta} \tilde{\beta} + G^T \tilde{\theta} \tilde{\gamma} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Où :

$$\begin{aligned} A &= k_{mu}\omega_1\theta_{1a} > 0 \\ B &= k_\beta\omega_2 > 0 \\ C &= k_\gamma\omega_3 > 0 \\ D &= \frac{k_{mu}\omega_1}{2\Delta} \\ E &= -\frac{k_{mu}\omega_1}{4}\theta_{1a} \\ F^T &= \left[\frac{k_\beta\omega_2}{2\theta_{1a}^2} \quad -\frac{k_\beta\omega_2}{2\theta_{1a}} \quad 0 \quad \frac{k_\beta\omega_2}{2\theta_{1a}^2}\beta \quad -\frac{k_\beta\omega_2}{2\theta_{1a}} \quad 0 \right] \\ G^T &= \left[-\frac{k_\gamma\omega_3\theta_{1b}^2}{4\theta_{1a}^2} \quad \frac{k_\gamma\omega_3\theta_{1b}}{2\theta_{1a}} \quad -\omega_3k_\gamma \quad \frac{k_\gamma\omega_3\theta_{1b}^2}{4\theta_{1a}^2} + \frac{k_\gamma\omega_3\beta\theta_{1b}}{\theta_{1a}} + k_\gamma\omega_3\beta^2 \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \quad k_\gamma\omega_3\beta - \frac{k_\gamma\omega_3\theta_{1b}}{2\theta_{1a}} \quad \omega_3k_\gamma \right] \\ \lambda &> 0 \end{aligned}$$

Pour avoir $\dot{V} < 0$, il faut :

$$\begin{aligned}
D^2 &< 4AC \\
E^2 &< 4AB \\
F^T F &< 4B\lambda R \\
G^T G &< 4C\lambda R
\end{aligned}$$

Les deux dernières conditions peuvent paraître difficiles à satisfaire puisque les éléments de la matrice R varient dans le temps. Toutefois, comme la matrice est bornée, le respect de ces conditions peut être assuré par un choix des paramètres k_β , k_γ , ω_2 et ω_3 assurant que $FF^T < 4B\lambda\delta_1$ et $GG^T < 4C\lambda\delta_1$. La condition $\dot{V} < 0$ peut donc être assurée par un choix adéquat des valeurs de ω_1 , ω_2 , ω_3 , k_{mu} , k_β , k_γ , λ et Δ . Ceci démontre la stabilité locale asymptotique du point d'équilibre de la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée. \square

2.3.3 Optimisation de deux bioréacteurs non identiques par la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée

La méthode d'optimisation multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée est appliquée au système composé de deux bioréacteurs non identiques tels que définis à la section précédente (Voir Figure 2.2). Toutefois, comme les courbes statiques des deux bioréacteurs n'ont nullement l'allure d'une quadratique, l'hypothèse utilisée dans la preuve ne tient plus. Des lois de commande qui s'apparentent aux lois de commande des correcteurs à adaptation séquentielle sont plutôt utilisées dans ce cas. Ainsi, les lois d'adaptation des correcteurs à adaptation simultanée sont définies selon la différence des pentes des unités (correcteur $\hat{\beta}$) et la différence des sorties des unités au même point d'opération (correcteur $\hat{\gamma}$). Ces lois de commande sont décrites

par les équations suivantes :

$$\dot{\hat{\beta}} = k_{\beta} \left(2\hat{\theta}_{2a}(u - \hat{\beta}) + \hat{\theta}_{2b} - 2\hat{\theta}_{1a}(u) + \hat{\theta}_{1b} \right) \quad (2.78)$$

$$\hat{\gamma} = k_{\gamma} \left(\hat{\theta}_{2a}(u - \hat{\beta})^2 + \hat{\theta}_{2b}(u - \hat{\beta}) + \hat{\theta}_{2c} - \hat{\theta}_{1a}(u)^2 + \hat{\theta}_{1b}(u) + \hat{\theta}_{1c} - \hat{\gamma} \right) \quad (2.79)$$

Les paramètres de réglage utilisés sont fournis à l'annexe IV. Les Figures 2.13 et 2.14 montrent les résultats obtenus.

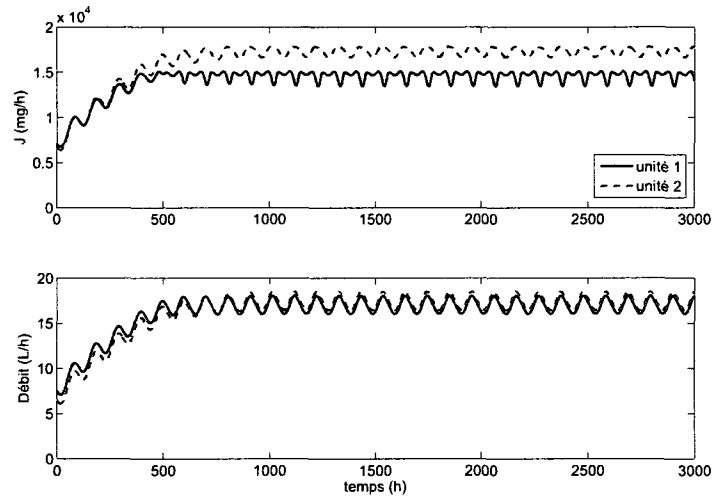


Figure 2.13 Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée : évolution des entrées et sorties

Bien que les courbes statiques des bioréacteurs ne soient pas quadratiques, l'utilisation d'un modèle quadratique permet de converger à un point relativement près de l'optimum en environ 1000 heures soit un temps semblable à celui obtenu avec les correcteurs à adaptation séquentielle. On obtient donc une performance équivalente sans discontinuité de l'optimisation. Les perturbations du procédé seront donc mieux compensées par le système en boucle fermée.

Le correcteur $\hat{\gamma}$ nécessite la valeur des sorties des unités au même point d'opération.

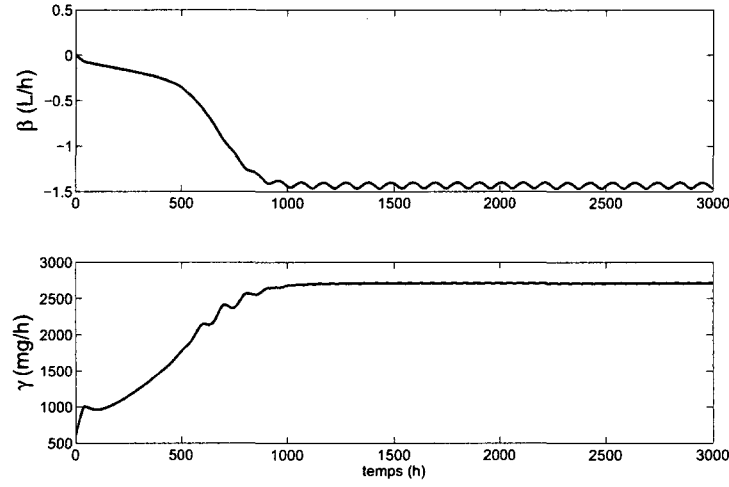


Figure 2.14 Résultat d'optimisation de deux bioréacteurs non identiques selon la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée : évolution des correcteurs

Ces valeurs peuvent être obtenues aisément même avec une moins bonne estimation des paramètres du modèle. Un modèle de premier ordre serait même suffisant pour obtenir une bonne correction $\hat{\gamma}$. Le correcteur $\hat{\beta}$ nécessite quant à lui l'estimation des gradients de chacune des unités au même point d'opération. Comme les points d'opération réels des unités sont distants d'une valeur Δ , le modèle doit être capable de représenter un changement de pente à des points d'opération différents. Ainsi, un modèle de 2ième ordre est requis pour avoir une bonne évaluation de $\hat{\beta}$. De plus, l'amplitude du signal d'excitation périodique utilisé doit être suffisamment grande pour permettre une bonne estimation des paramètres $\hat{\theta}_{2a}$ et $\hat{\theta}_{1a}$ autour de l'optimum (estimation de la courbure) et ainsi obtenir une valeur $\hat{\beta}$ adéquate.

Le gain d'adaptation multi-unités k_{mu} doit être réduit dans le cas des correcteurs à adaptation simultanée. Ici l'adaptation multi-unités se fait de façon continue et non uniquement durant une période prédéterminée comme c'est le cas de l'approche séquentielle. Ainsi, la réduction du gain est proportionnelle au rapport entre la période d'adaptation multi-unités (T_1) et à la période totale ($T_1 + T_2$) dans l'approche séquentielle.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les effets de différences entre les courbes statiques des unités du procédé sur la convergence de la méthode d'optimisation multi-unités ont été identifiés. Selon l'hypothèse que les courbures des caractéristiques statiques sont les mêmes autour de l'optimum, il a été démontré que la stabilité de la méthode multi-unités peut être assurée par un choix adéquat du paramètre Δ . Toutefois, même si la stabilité est ainsi assurée, une valeurs non-nulle de γ amène le système à converger vers un point d'équilibre qui peut être fort différent de l'optimum réel. Afin d'éviter de tels résultats, des correcteurs $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ ont été introduits dans le schéma original. Deux types d'adaptation ont été proposés soit l'adaptation séquentielle et l'adaptation simultanée. L'adaptation séquentielle des correcteurs nécessite une interruption de l'optimisation multi-unités afin de permettre une mise à jour des correcteurs alors que l'adaptation simultanée permet la mise à jour des correcteurs simultanément à l'évolution du système vers l'optimum. La preuve de stabilité locale de ces deux types de correction a été présentée. Les résultats de simulation ont démontré que l'utilisation de correcteurs permet d'amener le système à son point optimal réel. Toutefois, la vitesse de convergence du système est ralenti par le temps nécessaire à l'estimation des valeurs de β et γ . Malgré ce ralentissement, si les différences entre les courbes statiques des unités sont faibles, l'avantage de la méthode multi-unités par rapport à la méthode des perturbations quant à la vitesse de convergence est maintenu. Cet avantage sera perdu dans le cas où les unités sont vraiment très différentes.

CHAPITRE 3

OPTIMISATION MULTI-UNITÉS SOUS CONTRAINTES : PROJECTION DU GRADIENT SUR LES CONTRAINTES ACTIVES

La plupart des travaux de commande extrémale traite des problèmes d'optimisation sans contraintes. Toutefois, lorsque le problème inclut des contraintes inégalité, il peut être transformé en un problème d'optimisation sans contraintes par l'utilisation d'une fonction barrière (Vassiliadis et Floudas, 1997). La loi de commande extrémale (1.43) peut alors s'appliquer à la fonction objectif augmentée J_B du problème (1.7) qui inclut une pénalité logarithmique assurant le respect des contraintes inégalité (Dehaan et Guay, 2005) :

$$\dot{u} = -k \frac{\partial J_B}{\partial u} \quad (3.1)$$

Cette pénalité assure que le système converge vers un point situé à une certaine distance des contraintes actives. Cette distance, proportionnelle à la valeur de ζ dans l'équation (1.7) entraîne également une perte de performance. L'ajustement du paramètre ζ consiste à faire un compromis entre la faisabilité et l'optimalité.

3.1 Principe de la projection du gradient sur les contraintes actives

La méthode de projection (Rosen, 1960) est couramment utilisée pour résoudre numériquement des problèmes d'optimisation sous contraintes inégalité. Cette méthode consiste à suivre la direction de descente donnée par le gradient projeté sur l'ensemble

des contraintes actives. Cette méthode peut également être utilisée pour traiter des problèmes sous contraintes inégalité dans un contexte de commande extrémale. Si \bar{S} , l'ensemble des contraintes actives, est connu en tout temps, la loi de commande extrémale peut être modifiée pour suivre la direction de descente donnée par le gradient projeté sur cet ensemble de contraintes actives.

Les conditions nécessaires d'optimalité du problème (1.6) sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{du} + \nu^T \frac{dS}{du} &= 0 \\ \nu^T S &= 0 \Rightarrow \nu_j = 0 \text{ or } S_j = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

où ν représente les multiplicateurs de Lagrange et les dérivées totales sont données par,

$$\frac{dX}{du} = \left(\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial u} \right) \quad (3.3)$$

avec X représentant J ou S . Lorsqu'une contrainte est active, le multiplicateur de Lagrange ν qui lui est associé est positif, alors qu'il est nul lorsque la contrainte est inactive. Si μ représente les multiplicateurs de Lagrange non nuls associés aux contraintes actives, les conditions nécessaires d'optimalité (3.2) peuvent être réécrites selon l'espace réduit :

$$\begin{aligned} g + \mu^T M &= 0 \\ \bar{S} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec $g \equiv \frac{dJ}{du}$ et $M \equiv \frac{d\bar{S}}{du}$.

Ainsi, les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes actives peuvent s'ex-

primer par $\mu^T = -gM^+$, avec $M^+ = M^T(MM^T)^{-1}$, la matrice pseudo-inverse de M . En remplaçant $\mu^T = -gM^+$ dans (3.4) on obtient,

$$gP = 0, \quad P \equiv \mathcal{P}(M) = I - M^+M \quad (3.5)$$

En supposant que les valeurs de g et M soient connues, la loi de commande extrémale devient :

$$\dot{u} = -kP^T g^T \quad (3.6)$$

Contrairement à la fonction barrière qui impose une certaine distance entre le point d'équilibre et la frontière de la région admissible (fixée par le paramètre ζ), la méthode de projection converge vers l'optimum situé directement sur la frontière de la région admissible permettant ainsi d'atteindre une meilleure performance.

Il faut noter que par définition, $MP = 0$, mais $MP^T = 0$ également. Donc, la variation des contraintes actives est donnée par,

$$\dot{\bar{S}} = \frac{d\bar{S}}{du} \dot{u} = -kMP^T g^T = 0 \quad (3.7)$$

La méthode de projection requiert de connaître l'ensemble des contraintes actives, \bar{S} en tout temps. L'identification de cet ensemble des contraintes actives est une décision discrète. La méthode d'optimisation en temps réel contient donc des états continus ainsi que des états discrets : le vecteur d'entrées u et les états x sont considérés comme les états continus, alors que l'ensemble des contraintes actives \bar{S} représente les états discrets du système. Cette méthode doit donc être considérée dans un contexte de systèmes hybrides (Grossman et al., 1993). L'évolution des états continus de chacun des états hybrides est donné par (3.6). Une logique de mise à jour est requise pour initier un changement d'un état hybride à un autre.

Le changement d'un état hybride est initié par les deux critères suivants :

1. Une contrainte est atteinte, puisque continuer dans le présent état hybride mènerait à l'infaisabilité
2. Un des éléments de μ devient nul, puisqu'un meilleur coût peut être obtenu en quittant cette contrainte

Soit \hat{S} , l'ensemble complémentaire de \bar{S} tel que $S = \bar{S} \cup \hat{S}$, la structure de l'algorithme de projection peut être présentée par le pseudocode suivant :

```

while  $gP \neq 0$ 
     $\dot{u} = -kP^T g^T$ 
    if  $(\hat{S}_i = 0) \text{ or } (\mu_j = 0)$ 
         $\bar{S} = \textit{switchinglogic}(\bar{S}, \hat{S}_i, \mu_j)$ 
    end if
end while

```

Afin de pouvoir utiliser une projection du gradient sur les contraintes actives avec une méthode de commande extrémale, une première idée que nous avons eu fut d'adapter l'algorithme défini par Rosen (1960) dans un contexte continu. Cette logique de choix des contraintes actives est nommée dans le présent ouvrage *Rosenlogic*. Les étapes de cette logique vont maintenant être définies. Si une nouvelle contrainte est atteinte, elle est tout d'abord incluse dans l'ensemble des contraintes actives. Or, tout changement dans l'ensemble des contraintes actives engendre un changement des valeurs de μ . Les nouvelles valeurs de μ peuvent nécessiter le retrait de quelques contraintes de l'ensemble des contraintes actives si au moins un des éléments de μ

change de signe. La figure 3.1 représente le cas où un multiplicateur de Lagrange est négatif i.e. où une contrainte \bar{S} doit être retirée de l'ensemble de contraintes actives. Si elle n'est pas quittée, la direction $-gP$ ne sera pas une direction qui tend vers l'optimum. Dans ce cas, la direction $-g$ est un meilleur choix. Soit \tilde{S} , l'ensemble des contraintes que la logique souhaite retirer de l'ensemble des contraintes actives. Pour cet ensemble, la dérivée $\dot{\bar{S}}^{pred} = -gP \left[\frac{\partial \bar{S}}{\partial u} \right]^T$ indique si ces contraintes seront violées ou non lorsque la direction $-gP$ est considérée. $\dot{\bar{S}}^{pred}$ doit être inférieure à 0 pour que la direction soit faisable. La figure 3.2 représente le cas où la direction $-gP$ est infaisable i.e. où une contrainte \tilde{S} doit être remise dans l'ensemble de contraintes actives. Si cette contrainte ne devient pas active, la direction à suivre demeure $-gP$ et clairement, cette direction viole la contrainte \tilde{S} . Ainsi, la logique de mise à jour *Rosenlogic* contient une boucle *while* qui assure la positivité de μ et la négativité de $\dot{\bar{S}}^{pred}$. Le pseudocode suivant présente la version de la logique proposée dans Rosen (1960) adaptée à un contexte continu.

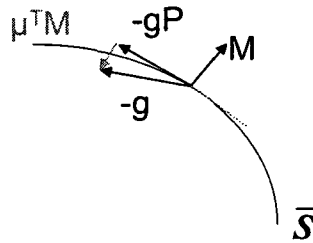


Figure 3.1 La contrainte \bar{S} doit être retirée de l'ensemble \bar{S} si $\mu < 0$

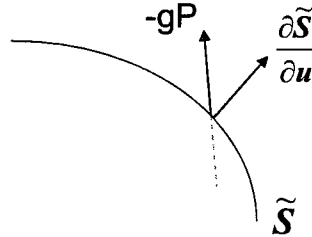


Figure 3.2 La contrainte \tilde{S} doit être remise dans l'ensemble \bar{S} si $\dot{\tilde{S}}^{pred} > 0$

Pseudocode de la logique de Rosen :

```

function  $\bar{S} = \text{Rosenlogic}(\bar{S}, S_i, \mu_j)$ 
  if  $\exists S_i \in \hat{S} \mid S_i = 0$ 
     $\bar{S} = S_i \cup \bar{S}$  (add constraint to active set)
  end if
   $\tilde{S} = []$ 
  while  $\exists \mu_j < 0$ 
     $\tilde{S} = S_j \cup \tilde{S}$  (remove constraint from active set)
    while  $\exists \dot{\tilde{S}}_k^{pred} = \max(\dot{\tilde{S}}^{pred}) > 0$ 
       $\tilde{S} = \tilde{S} \setminus S_k$  (put back constraint to active set)
    end while
  end while
   $\bar{S} = \bar{S} \setminus \tilde{S}$ 
end function

```

La difficulté principale avec la logique *Rosenlogic* est la possibilité que la boucle *while* ne trouve aucune direction projetée faisable et devienne ainsi une boucle infinie. Il est possible de trouver des contre-exemples démontrant ce fait. Une telle situation, souvent nommée "*jamming*" dans la littérature, peut survenir avec cette logique de mise à jour. A chaque mise à jour de l'ensemble des contraintes actives, il n'est donc pas garanti de trouver une nouvelle direction de descente projetée en utilisant l'algorithme tel que défini par Rosen, adapté en continu. Une logique évitant les problèmes de "*jamming*" est proposée à la section suivante.

3.2 Logique de mise à jour sans boucle infinie

La logique de mise à jour proposée, nommée *Proposedlogic*, assure que l'algorithme n'entre pas dans une boucle infinie. La logique de mise à jour est initiée par les deux mêmes critères utilisés pour initier la logique de Rosen énoncée précédemment. De plus, si une nouvelle contrainte est atteinte, la première étape consiste également à inclure cette contrainte dans l'ensemble des contraintes actives.

Dans la logique *Rosenlogic* présentée précédemment, l'étape suivante consiste en une boucle *while*, où le problème de boucle infinie peut survenir. Ici, le choix de la contrainte à remettre dans l'ensemble des contraintes actives est fait en utilisant un indicateur normalisé de faisabilité. Ainsi, un choix émanant de cet indicateur normalisé assure l'identification d'un ensemble de contraintes actives respectant les deux conditions liées à la faisabilité et à l'optimalité énoncées précédemment.

Pseudocode de la logique de mise à jour :

```

function  $\bar{S} = \textit{Proposedlogic}(\bar{S}, S_i, \mu_j)$ 
  if  $\exists S_i \in \hat{S} \mid S_i = 0$ 
     $\bar{S} = S_i \cup \bar{S}$  (add constraint to active set)
  end if
   $\tilde{S} = [\ ]$ ,  $f = -gP$ 
  while  $\exists \mu_j < 0$ 
     $\tilde{S} := \tilde{S} \cup S_j$  (remove constraint from active set)
    while  $\exists \dot{\tilde{S}}_{normk}^{pred} = \min(\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred}) < 0$ 
       $\tilde{S} := \tilde{S} \setminus S_k$  (put back constraint to active set)
    end while
  end while
   $\bar{S} := \bar{S} \setminus \tilde{S}$ 
end function

```

À tout instant durant l'exécution de la logique *Proposedlogic*, $d = -g\mathcal{P}(\Gamma)$ avec $\Gamma = \frac{\partial(\bar{S} \setminus \tilde{S})}{\partial u}$. Donc, d représente la projection du gradient sur l'ensemble des contraintes que la logique désire conserver actives à l'étape en cours. De plus, la fonction *Sprednorm* est appelée à chaque fois que l'ensemble \tilde{S} est modifié. Cette fonction est résumée dans le pseudo-code suivant :


```

function ( $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred}, f$ ) = Sprednorm( $\tilde{S}, f, d$ )
 $\dot{\tilde{S}}_f^{pred} = f \frac{\partial \tilde{S}^T}{\partial u}$  ,  $\dot{\tilde{S}}^{pred} = d \frac{\partial \tilde{S}^T}{\partial u}$  ,
 $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred} = \frac{\dot{\tilde{S}}^{pred}}{\dot{\tilde{S}}_f^{pred}}$ 
if  $f \neq d$ 
  if  $\exists \dot{\tilde{S}}_{norm_k}^{pred} = \min(\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred}) < 0$ 
     $\alpha = \frac{1}{1 - \dot{\tilde{S}}_{norm_k}^{pred}}$ 
  else
     $\alpha = 1$ 
  end if
   $\rho = \frac{-((1 - \alpha)f + \alpha d)g^T}{\|(1 - \alpha)f + \alpha d\|^2}$ 
   $f := \rho((1 - \alpha)f + \alpha d)$ 
end if
end function

```

Le point crucial de la fonction présentée ci-haut est l'utilisation de la direction f pour des fins de normalisation. Le gradient projeté d est parfois infaisable et, dans de tels cas, une ou plusieurs contraintes doivent alors être remises dans l'ensemble des contraintes actives. Dans de telles circonstances, plutôt que de considérer un pas entier i.e. $\alpha = 1$, un pas restreint $\alpha < 1$ est pris afin de garantir la faisabilité de f , la direction projetée sur le nouvel ensemble de contraintes actives. (Note : $\Gamma f^T = 0$ est satisfait à chaque étape de la logique, avec $\Gamma \equiv \frac{\partial \tilde{S}}{\partial u}$. Ce fait sera prouvé dans l'analyse qui suit).

3.3 Analyse de stabilité de la commande extrémale avec projection du gradient

La commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives sera maintenant analysée. La logique de mise à jour sera tout d'abord analysée. Il sera démontré que la logique proposée permet d'identifier une direction de descente projetée faisable en un nombre fini d'itérations. Ensuite, il sera démontré que la loi extrémale avec projection sur les contraintes actives utilisée avec la logique de mise à jour proposée permet d'atteindre l'optimum.

3.3.1 Analyse de la logique de mise à jour

Il sera maintenant démontré que la logique *Proposedlogic* se termine par l'identification d'une direction projetée faisable en un nombre fini d'itérations vérifiant la positivité de μ , les multiplicateurs de Lagrange des contraintes actives. Pour établir cette preuve, il sera tout d'abord démontré que la direction f est toujours faisable et que son amplitude augmente à chaque itération.

Avant d'aller directement à ces deux propositions, considérons le lemme suivant qui décrit ce qui se produit lorsqu'un pas restreint est adopté.

Lemme 3.3.1. *Soit ν et ω deux vecteurs tels que $-g\nu^T = \nu\nu^T$, $-g\omega^T = \omega\omega^T$ avec $\omega\omega^T > \nu\nu^T$*

Alors, tout $\xi = \rho((1 - \alpha)\nu + \alpha\omega)$ avec $\alpha \in (0, 1]$ et ρ donné par

$$\rho = \frac{(1 - \alpha)\nu\nu^T + \alpha\omega\omega^T}{(1 - \alpha)^2\nu\nu^T + 2\alpha(1 - \alpha)\nu\omega^T + \alpha^2\omega\omega^T} \quad (3.9)$$

satisfait $-g\xi^T = \xi\xi^T$ et $\xi\xi^T > \nu\nu^T$.

Preuve : La multiplication de $\xi = \rho((1 - \alpha)\nu + \alpha\omega)$ par $-g$, et l'utilisation de $-g\nu^T = \nu\nu^T$ et $-g\omega^T = \omega\omega^T$ mène à :

$$-g\xi^T = \rho\{(1 - \alpha)\nu\nu^T + \alpha\omega\omega^T\} \quad (3.10)$$

D'un autre côté, $\xi\xi^T$ est donné par,

$$\xi\xi^T = \rho^2\{(1 - \alpha)^2\nu\nu^T + 2(1 - \alpha)\alpha\nu\omega^T + \alpha^2\omega\omega^T\} \quad (3.11)$$

Les équations (3.10) et (3.11) mènent à l'expression de ρ de l'équation (3.9). Soit l'expression de $\rho - 1$,

$$\rho - 1 = \frac{\alpha(1 - \alpha)(\nu - \omega)(\nu - \omega)^T}{((1 - \alpha)\nu - \alpha\omega)((1 - \alpha)\nu - \alpha\omega)^T} \geq 0 \quad (3.12)$$

Ceci prouve que $\rho \geq 1$. Puisque $\rho \geq 1$,

$$\xi\xi^T = \rho\{(1 - \alpha)\nu\nu^T + \alpha\omega\omega^T\} \quad (3.13)$$

$$\geq \nu\nu^T + \alpha(\omega\omega^T - \nu\nu^T) \quad (3.14)$$

De plus, de l'hypothèse de départ, $(\omega\omega^T - \nu\nu^T) > 0$, et il peut être conclu que $\xi\xi^T > \nu\nu^T$ pour $\alpha \in (0, 1)$. \square

Proposition 3.3.1. *f est toujours une direction faisable, i.e. $\dot{\tilde{S}}_f^{pred} = f \frac{\partial \tilde{S}}{\partial u}^T \leq 0$.*

Preuve :

La fonction ***Sprednorm*** est utilisée pour vérifier la faisabilité de d à chaque changement de \tilde{S} . Notons que la faisabilité de d est vérifiée par la positivité de $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred}$ plutôt que par la négativité de $\dot{\tilde{S}}^{pred}$ (comme c'est le cas dans la logique *Rosenlogic*). Ces deux conditions sont équivalentes si $\dot{\tilde{S}}_f^{pred} < 0$ puisque $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred} = \frac{\dot{\tilde{S}}^{pred}}{\dot{\tilde{S}}_f^{pred}}$. Dans le cas où $\dot{\tilde{S}}_f^{pred} = 0$, puisqu'il s'agit d'une direction faisable, cette expression devrait être considérée comme étant égale à une faible valeur négative tendant vers zéro. Ainsi, le signe de $\dot{\tilde{S}}^{pred}$ détermine la faisabilité.

Durant l'exécution de cette fonction, il y a deux possibilités : d est faisable et alors $f := d$. Ou alors, d n'est pas faisable et f est une direction interpolée entre la dernière direction f (avant le présent changement dans \tilde{S}) et d , la nouvelle direction projetée (après le changement).

La faisabilité de f sera démontrée par induction. Le choix initial de f et de \tilde{S} donne un ensemble $\dot{\tilde{S}}_f^{pred}$ vide qui est par définition faisable. Maintenant, il sera démontrée que si f est faisable, sa mise à jour sera également faisable. Soit la loi de mise à jour de f dans le cas où d est infaisable, i.e.,

$$f := \rho((1 - \alpha)f + \alpha d)$$

La multiplication de cette loi de mise à jour par $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial u}^T$ donne,

$$\dot{\tilde{S}}_f^{pred} := \rho \left((1 - \alpha)\dot{\tilde{S}}_f^{pred} + \alpha\dot{\tilde{S}}^{pred} \right) \quad (3.15)$$

L'introduction de l'expression de $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred}$ et le réarrangement du résultat mène à :

$$\dot{\tilde{S}}_f^{pred} := \dot{\tilde{S}}_f^{pred} \rho \left(1 + \alpha \left(\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred} - 1 \right) \right) \quad (3.16)$$

En substituant l'expression de α dans (3.16) on obtient :

$$\dot{\tilde{S}}_f^{pred} := \dot{\tilde{S}}_f^{pred} \rho \left(\frac{\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred} - \dot{\tilde{S}}_{normk}^{pred}}{1 - \dot{\tilde{S}}_{normk}^{pred}} \right) \quad (3.17)$$

Puisque $\dot{\tilde{S}}_{normk}^{pred}$ est le minimum des éléments négatifs de $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred}$, le terme à l'intérieur des parenthèses est non-négatif. Puisqu'avant la mise à jour, $\dot{\tilde{S}}_f^{pred} \leq 0$, ce sera encore le cas après la mise à jour, ce qui conclut l'induction.

Proposition 3.3.2. *Chaque mise à jour de f augmente son amplitude.*

Preuve : La direction f est mise à jour seulement à l'intérieur de la fonction "Spred-norm". Cette fonction est amorcée avec une certaine direction d . Supposons qu'il soit démontré que $dd^T > ff^T$ et $dd^T = -gd^T$. Si le pas entier est accepté, la nouvelle direction f aura une amplitude supérieure à celle de l'ancienne direction f par hypothèse. Même si une direction restreinte est prise, il fut démontré dans le Lemme 3.3.1 que l'amplitude de ce nouveau vecteur augmente si $\alpha > 0$. Donc, il reste à démontrer que la fonction est amorcée avec une valeur de d qui satisfasse $dd^T > ff^T$ et $\alpha > 0$.

Afin de démontrer que $dd^T > ff^T$, il est tout d'abord montré que $\Gamma f^T = 0$ est toujours satisfait, avec $\Gamma \equiv \frac{\partial \tilde{S}}{\partial u}$. Juste avant le retrait d'une contrainte, $f = d$ et alors, $\Gamma f^T = 0$. Lorsqu'une contrainte est retirée, puisqu'une seule des lignes de Γ est retirée l'orthogonalité n'est pas affectée. Lorsqu'une contrainte est ajoutée, il peut être vérifié par (3.17) que $(\dot{\tilde{S}}_f^{pred})_k = \frac{\partial S_k}{\partial u} f^T = 0$, ce qui signifie que la ligne qui serait ajoutée à Γ , i.e $\frac{\partial S_k}{\partial u}$ est déjà orthogonale à f . Donc, avec l'ajout de cette ligne, $\Gamma f^T = 0$ sera encore satisfait.

Puisque $\Gamma f^T = 0$, $\mathcal{P}(\Gamma)f^T = (I - \Gamma^+\Gamma)f^T = f^T$. De plus, du Lemme 3.3.1, $-fg^T = ff^T$. Donc, $fd^T = -f\mathcal{P}(\Gamma)g^T = -fg^T = ff^T$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\cos^2(\theta) = \frac{(fd^T)^2}{(ff^T)(dd^T)} \leq 1$$

La substitution de $fd^T = ff^T$ donne $dd^T \geq ff^T$. Si $ff^T = dd^T$, alors $\cos(\theta) = 1$, i.e., $f = d$. Donc, dans ce cas, l'égalité des normes implique que les deux vecteurs sont les mêmes.

Dans le cas de l'ajout d'une contrainte, la condition $f = d$ peut survenir, mais avec la logique de la boucle, il n'y aura pas de mise à jour. Donc, lorsque l'équation de mise à jour est invoquée $dd^T > ff^T$. Toutefois, l'égalité ne peut persister puisque la boucle *while* qui remet la contrainte est terminée avec $f = d$, i.e. $\dot{S}_{norm}^{pred} = 1$.

Le cas du retrait d'une contrainte sera maintenant considéré. Juste avant qu'une contrainte ne soit retirée, $f = d$. Les indices "avant" et "après" seront utilisés pour marquer la distinction entre les variables avant et après le retrait d'une contrainte, i.e. $f = d_{avant}$. Il sera montré que $d_{apres} \neq d_{avant}$. Soit $\mu_j < 0$, l'élément le plus négatif de μ_{avant} . Alors, la mise à jour de Γ est donné par $\Gamma_{apres} := \Gamma_{avant} \setminus \frac{\partial S_j}{\partial u}$. Le gradient peut s'exprimer en utilisant Γ et μ comme suit, avec $\nu \perp \Gamma_{avant}$.

$$-g = \mu_{apres}^T \Gamma_{avant} + \nu \tag{3.18}$$

$$= \mu_{apres}^T \Gamma_{apres} + \mu_j \frac{\partial S_j}{\partial u} + \nu \tag{3.19}$$

De par les propriétés de la matrice de projection et la perpendicularité de ν , il peut

être vérifié que

$$d_{avant} = -gP(\Gamma_{avant}) = \nu \quad (3.20)$$

$$d_{apres} = -gP(\Gamma_{apres}) = \mu_j \frac{\partial S_j}{\partial u} P(\Gamma_{apres}) + \nu \quad (3.21)$$

Puisque $\mu_j < 0$, $d_{apres} \neq d_{avant}$.

Ensuite, il sera démontré que $\alpha > 0$. $\alpha = 0$ arrive lorsque $\min(\dot{S}_{norm}^{pred}) = -\infty$, i.e. $(\dot{S}^{pred})_j > 0$, et $(\dot{S}_f^{pred})_j = 0^-$. La condition $(\dot{S}_f^{pred})_j = 0^-$ est vraie seulement lors du retrait d'une contrainte. Afin d'éviter $\alpha = 0$, il doit être démontré que pour le retrait d'une contrainte $(\dot{S}^{pred})_j < 0$.

La multiplication de (3.21) par $\left(\frac{\partial S_j}{\partial u}\right)^T$ donne

$$(\dot{S}^{pred})_j = \mu_j \frac{\partial S_j}{\partial u} P(\Gamma_{apres}) \left(\frac{\partial S_j}{\partial u}\right)^T < 0 \quad (3.22)$$

La négativité stricte est assurée par $\mu_j < 0$.

Théorème 3.3.1. *L'algorithme proposé dans ce chapitre fournira une direction projetée faisable en un nombre fini d'itérations.*

Preuve : Il fut démontré dans les deux propositions précédentes que tout f est faisable et ff^T est strictement augmenté à chaque itération. De par la stricte inégalité, il peut être vu que la direction f change à chaque itération.

La boucle de pas restreint ajoute une seule contrainte à la fois et l'algorithme sortira de cette boucle avant ς itérations, où ς représente le nombre total de contraintes dans l'ensemble initial de contraintes actives (lorsque la logique est invoquée). Le fait que cette boucle sera terminée avant peut être vu par contradiction. Si la boucle est exécutée ς fois, alors toutes les contraintes seront incluses dans l'ensemble des

contraintes actives, ce qui correspond à un retour aux conditions de départ. Ceci vient contredire l'augmentation monotonique de ff^T .

Pour ce qui est du nombre de fois où la boucle externe est exécutée, puisque le nombre d'ensembles de contraintes actives est un nombre fini, le nombre d'exécutions est limité à 2^s . Donc, le maximum d'itérations de l'algorithme en entier est limité à $\varsigma 2^s$, un nombre fini.

L'algorithme se termine lorsque les multiplicateurs de Lagrange des contraintes actives sont positifs et que la direction d est faisable.

3.3.2 Analyse de la commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives

Théorème 3.3.2. *Soit le système dynamique du problème (1.6) avec le contrôleur de commande extrémale (3.6). Si les contraintes inégalité sont linéairement indépendantes à tout point de la région admissible, Ω , alors le schéma de commande extrémale converge asymptotiquement vers l'optimum.*

Preuve :

Soit u^{opt} , le point optimal de la fonction convexe $J(u)$ et $u \neq u^{opt}$, un point de Ω avec l'ensemble des contraintes actives étant \bar{S} . Le théorème 4.1 a démontré que lors d'un changement des états discrets, il existe un nouvel état discret pour lequel les multiplicateurs de Lagrange sont positifs. Donc, par construction, les multiplicateurs de Lagrange correspondant à \bar{S} sont toujours positifs.

Soit la fonction de Lyapunov $V(u) = (J(u) - J(u^{opt}))$ définie sur Ω . Puisque J est convexe, V est définie positive, étant nulle seulement à l'optimum.

Soit l'instant t_s où l'ensemble des contraintes actives change. Puisque le changement de l'ensemble des contraintes actives ne nécessite pas un changement d'entrée, $u(t_s-) = u(t_s^+)$ et $V(u(t_s^-)) = V(u(t_s^+))$.

Durant les instants où l'ensemble des contraintes actives ne changent pas, la dérivée par rapport au temps de cette fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\dot{V} = \frac{\partial J}{\partial u} \dot{u} = -kgP^T g^T \quad (3.23)$$

Puisque P^T est semi-définie positif, une valeur positive de k assure $\dot{V} \leq 0$. Dans le cas où aucune contrainte n'est active, $P = I$ et $\dot{V} = -kgg^T \leq 0$. À l'autre extrême, lorsqu'il y a autant de contraintes actives qu'il y a de variables, M est de rang m , $P = 0$ et $\dot{V} = 0$.

L'évolution se terminera lorsque $\dot{V} = 0$, i.e. $gP^T g^T = gPP^T g^T = 0$, ce qui implique que $gP = 0$. Lorsque le gradient réduit est nul, i.e. $gP = 0$, et que les multiplicateurs de Lagrange correspondant aux contraintes actives sont positifs, l'optimum est atteint. \square

Logique de mise à jour proposée et maximisation de la norme

À partir de la preuve de la Proposition 3.3.2, il peut être montré que la logique *Proposedlogic* est en fait une optimisation de la norme ff^t . Donc, la logique *Proposedlogic* peut être exprimée sous la forme d'un problème d'optimisation. Pour un ensemble initial de contraintes actives donné, l'objectif est de trouver une direction d de norme maximale respectant les conditions suivantes :

1. aucune contrainte n'est violée i.e, $\dot{\tilde{S}}^{pred} < 0$
2. d est une projection du gradient sur l'ensemble des contraintes actives i.e,

$$-gd^T = dd^T$$

Considérant ces conditions, le problème d'optimisation peut se formuler comme suit :

$$\begin{aligned} \max_d \quad & dd^T \\ \text{s.t.} \quad & Md^T \leq 0 \\ & -gd^T = dd^T \end{aligned} \tag{3.24}$$

La résolution de ce problème d'optimisation divisera l'ensemble initial de contraintes actives en deux sous-ensembles. Les contraintes inactives de la solution de ce problème d'optimisation représentent les contraintes devant être quittées. Puisque la solution de ce problème d'optimisation est unique (contraintes linéaires/quadratiques, fonction objectif quadratique), la solution sera la même que celle trouvée par les deux boucles *while* de la logique *Proposedlogic* (la première concernant μ_j et l'autre concernant \dot{S}_{normk}^{pred}). Les deux boucles *while* constituent une façon possible de résoudre le problème d'optimisation (3.24). Toute autre méthodologie pourrait également être utilisée pour résoudre ce problème d'optimisation quadratique. Une façon plus générale de résumer la logique proposée, *Proposedlogic*, est donnée par le pseudo-code suivant :

```

function  $\bar{S} = \textit{Proposedlogic}(\bar{S}, S_i, \mu_j)$ 
  if  $\exists S_i \in \hat{S} \mid S_i = 0$ 
     $\bar{S} = S_i \cup \bar{S}$  (ajouter la contrainte à l'ensemble des contraintes actives)
  end if

  Résoudre le problème d'optimisation quadratique (3.24)
   $\tilde{S} = \{S_k \mid \dot{S}_k^{pred} < 0\}$ 
   $\bar{S} = \bar{S} \setminus \tilde{S}$ 
end function

```

3.4 Exemples pour illustrer la possibilité de boucles infinies

Deux exemples sont maintenant utilisés afin de montrer la possibilité de boucles infinies lorsque la logique *Rosenlogic* est utilisée. Le premier exemple est résolu par la logique *Rosenlogic* sans aucune boucle infinie alors que cette même logique présente une boucle infinie lorsque appliquée au deuxième exemple. Toutefois, la logique proposée *Proposedlogic* fonctionne correctement (sans aucune boucle infinie) dans les deux cas.

Soit le problème suivant,

$$\begin{aligned}
 \min_u \quad & -2u_1 + u_4 - 2u_5 \\
 \text{s.t.} \quad & S(u) = Au - B \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

où,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.73 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 35 & -1 & 0 \\ 1.5 & 0 & -2.5 & -0.3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1.27 \\ -1.5 \\ 46 \\ 2.5 \\ 100 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs initiales suivantes : $u_i = 1$ pour $i = 1$ à 5. La solution de ce problème est donnée par le point suivant,

$$(u^{opt})^T = \begin{bmatrix} -174 & -100 & 51.5 & -333.2 & 292.5 \end{bmatrix}$$

,point pour lequel les cinq dernières contraintes sont actives.

Au point initial, les quatre premières contraintes sont actives. Les deux logiques de mise à jour mènent exactement à la même solution. Les changements dans l'ensemble des contraintes actives menant à la solution optimale sont présentés à la Figure 3.3. La logique de mise à jour est utilisée trois fois pour changer l'ensemble des contraintes actives. À chacun de ces changements, une nouvelle direction projetée est suivie par les variables manipulées. Pour des fins d'esthétisme, le gain k de l'équation (3.6) a été modifié entre chaque mise à jour pour obtenir des intervalles de temps similaires. Le gain est donc égal à 0.0850 pour le premier intervalle et à 25, 32 et 1 pour les trois derniers.

Considérons maintenant le problème modifié de tel sorte à ce que la ligne correspondant à la 5^{ième} contrainte dans la matrice A soit désormais :

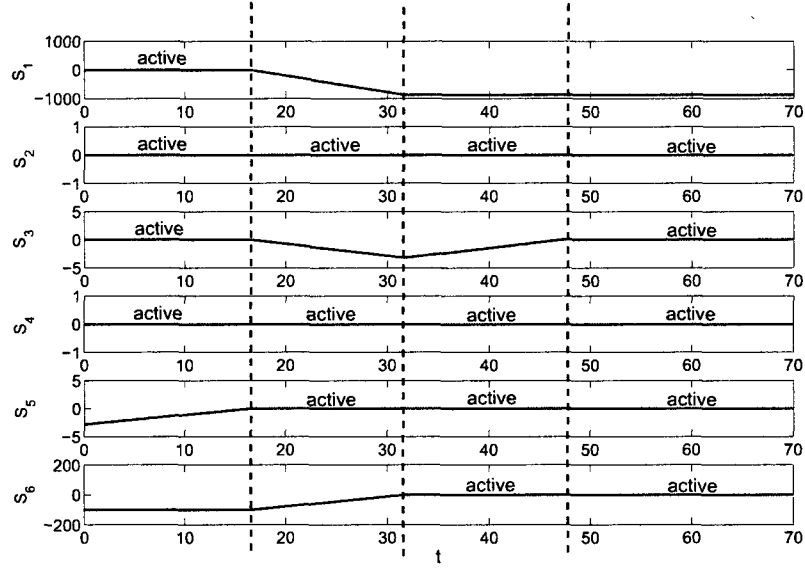


Figure 3.3 Exemple 1 : Évolution des contraintes

$$A(5,:) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2.5 & -0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution de ce nouveau problème est maintenant,

$$(u^{opt})^T = \begin{bmatrix} -174 & -100 & 51.5 & -333.2 & 579.6 \end{bmatrix}$$

Le seul changement dans la solution est dans la valeur de $u^{opt}(5)$. Une fois de plus, au point optimal, les contraintes 2 à 6 sont actives. Pour ce second problème, la logique *Rosenlogic* entre dans une boucle infinie (au premier changement de l'ensemble des contraintes actives) alors que la logique *Proposedlogic* fonctionne correctement. La Figure 3.4 montre l'évolution des contraintes lorsque la logique *Proposedlogic* est utilisée.

Afin de mieux comprendre comment la boucle infinie se produit avec la logique *Rosenlogic* et comment elle est évitée en utilisant la logique *Proposedlogic*, les itérations des deux logiques sont détaillées lors du premier changement de contraintes actives.

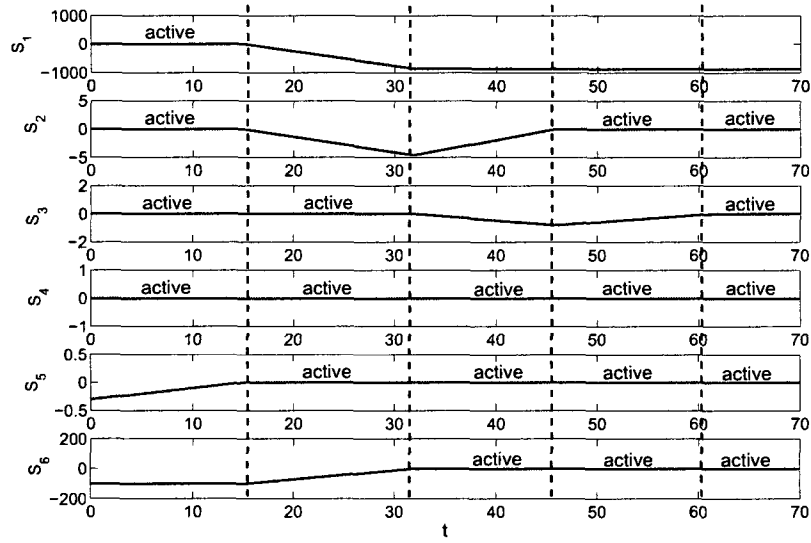


Figure 3.4 Exemple 2 : Évolution des contraintes

Les cinq premières contraintes sont incluses dans l'ensemble des contraintes actives et la logique est amorcée.

Les itérations de la logique *Rosenlogic* sont les suivantes :

- 1- $\tilde{S} = []$, $\mu_j = \mu_1$, $\dot{\tilde{S}}^{pred} = []$: retrait de S_1
- 2- $\tilde{S} = [S_1]$, $\mu_j = \mu_3$, $\dot{\tilde{S}}^{pred} = -2.04$: retrait de S_3
- 3- $\tilde{S} = [S_1, S_3]$, $\mu_j = \mu_2$, $\dot{\tilde{S}}^{pred} = -2.04, -5 \times 10^{-4}$: retrait de S_2
- 4- $\tilde{S} = [S_1, S_2, S_3]$, $\mu_j = []$, $\dot{\tilde{S}}^{pred} = \mathbf{1.3}, -4, 0.7$: remise de S_1
- 5- $\tilde{S} = [S_2, S_3]$, $\mu_j = []$, $\dot{\tilde{S}}^{pred} = -2.7, \mathbf{0.49}$: remise de S_3
- 6- $\tilde{S} = [S_2]$, $\mu_j = []$, $\dot{\tilde{S}}^{pred} = \mathbf{0.004}$: remise de S_2
- 7- $\tilde{S} = []$, $\mu_j = \mu_1$, $\dot{\tilde{S}}^{pred} = []$: retour à l'état initial.

Comme l'étape 7 est identique à l'étape 1, la logique *Rosenlogic* entre dans une boucle infinie. Les itérations de la logique *Proposedlogic* vont comme suit :

- 1- $\tilde{S} = []$, $\mu_j = \mu_1$, $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred} = []$: retrait de S_1
- 2- $\tilde{S} = [S_1]$, $\mu_j = \mu_3$, $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred} = \infty$: retrait de S_3

- 3- $\tilde{S} = [S_1, S_3]$, $\mu_j = \mu_2$, $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred} = 1$, ∞ : retrait de S_2
- 4- $\tilde{S} = [S_1, S_2, S_3]$, $\mu_j = []$, $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred} = -0.6$, ∞ , **-1500** : remise de S_3
- 5- $\tilde{S} = [S_1, S_2]$, $\mu_j = []$, $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred} = 0.6$, 2.6 : fin de la logique

À la fin des cinq itérations, puisque $\mu > 0$ et $\dot{\tilde{S}}_{norm}^{pred} > 0$, la logique *Proposedlogic* termine en identifiant une nouvelle direction faisable déterminée par la projection du gradient sur les contraintes $[S_3, S_4, S_5]$.

Pour ce deuxième exemple, on remarque que les trois premières itérations des deux logiques sont identiques. Le seul changement survient à l'itération 4, itération pour laquelle la logique *Rosenlogic* dicte la remise de S_1 dans l'ensemble des contraintes actives, alors que la logique *Proposedlogic* opte pour la remise de S_3 . Ces deux contraintes ont des valeurs de $\dot{\tilde{S}}^{pred}$ positives. Même si la valeur de $\dot{\tilde{S}}^{pred}$ est plus grande pour S_1 , un pas restreint correspondant à S_1 , i.e. $\alpha_1 = 1/1.6$ violerait S_3 , pour laquelle $\alpha_3 = 1/1501$. Dans la logique *Rosenlogic*, S_3 doit être remise à l'itération suivante ce qui engendre également la remise de S_2 , forçant ainsi un retour à l'état initial. Toutefois, en choisissant S_3 à l'itération 4, la logique *Proposedlogic* ne viole pas S_1 et se poursuit jusqu'à ce qu'un nouvel ensemble de contraintes actives soit identifié.

3.5 Optimisation multi-unités avec projection du gradient généralisée

La commande extrémale avec projection du gradient sur l'ensemble des contraintes actives peut être réalisée avec la méthode d'optimisation multi-unités. La structure de l'optimisation multi-unités avec projection du gradient sur les contraintes actives est présentée à la Figure 3.5. Cette structure inclut 2 blocs additionnels correspondant à la logique de mise à jour pour déterminer l'ensemble des contraintes actives et la projection du gradient sur ces contraintes actives. La particularité de l'estima-

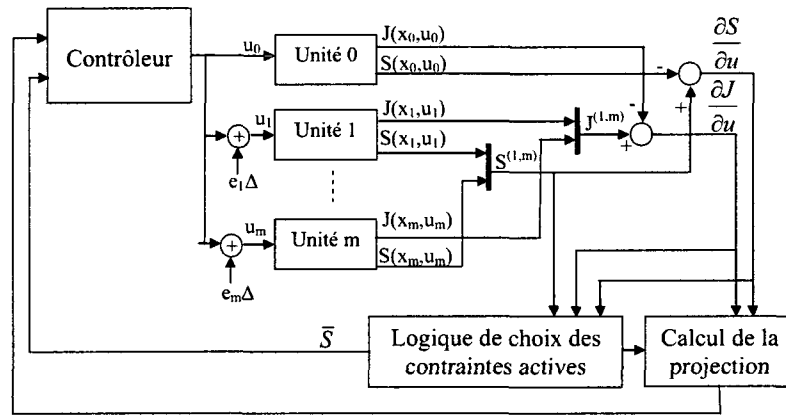


Figure 3.5 Structure de la méthode d'optimisation multi-unités sous contraintes inégalité avec projection du gradient sur les contraintes actives

tion du gradient selon la méthode multi-unités dans le présent contexte doit être clarifiée. Il est convenu que les contraintes tout comme la fonction objectif sont mesurées et que l'estimation du gradient de la fonction objectif et des contraintes sont obtenus simultanément. Aucune unité supplémentaire n'est nécessaire dans le procédé à optimiser pour estimer le gradient des contraintes. Une formule de différences finies similaire à celle utilisée pour estimer le gradient \hat{g} est utilisée pour estimer les gradients des contraintes.

$$\frac{\widehat{dS_j}}{du_i} = \frac{S_j(x_i, u_i) - S_j(x_0, u_0)}{\Delta} \quad (3.26)$$

Projection du gradient généralisée

Les conditions d'optimalité du problème sous contraintes contiennent deux parties : les contraintes actives, $\bar{S} = 0$, et la condition associée à la projection du gradient, $gP = 0$. Or, afin de s'assurer que les entrées du système évoluent de telle sorte à ce que les contraintes identifiées actives par la logique demeurent réellement actives, la loi de commande extrémale (3.6) est modifiée pour inclure les deux parties des

conditions d'optimalité (3.4) et assurer ainsi que la condition $\bar{S} = 0$ soit respectée :

$$\dot{u} = -kP^T g^T - k_s M^+ \bar{S} \quad (3.27)$$

Une valeur non-nulle de k_s assure le respect des contraintes actives. Avec $k_s > 0$,

$$\dot{\bar{S}} = -k_s \bar{S} - kMP^T g^T \quad (3.28)$$

correspond à un système stable qui force $\bar{S} = 0$.

3.6 Exemple : Optimisation multi-unités de la productivité trois réacteurs avec projection du gradient sur les contraintes actives

Dans l'exemple qui suit, la méthode d'optimisation multi-unités avec projection du gradient sur les contraintes actives et puis, avec fonction barrière est utilisée pour optimiser un procédé composé de trois réacteurs à agitation continue isothermiques identiques. Tout comme au chapitre précédent, un modèle mathématique du réacteur est utilisé pour simuler le procédé réel et agir ainsi comme "boîte noire" dans la méthode multi-unités. Le modèle utilisé est présenté à l'Annexe V.

Dans chacun de ces réacteurs, les réactions $A + B \rightarrow C$ et $2B \rightarrow D$ tiennent place, où C représente le produit désiré et D le produit non désiré. Le réacteur est alimenté par deux courants d'entrée avec des débit de q_a et q_b et des concentrations $c_{A_{in}}$ et $c_{B_{in}}$, respectivement.

Le problème d'optimisation consiste à maximiser la quantité du produit C, $(q_a + q_b)c_C$, pondérée par le facteur de production $(q_a + q_b)c_C / q_a c_{A_{in}}$. Les contraintes du problème incluent les limites supérieures de la chaleur générée ainsi que du débit total. Le

problème d'optimisation se formule comme suit :

$$\begin{aligned}
 \max_{q_a, q_b} \quad & J = \frac{(q_a + q_b)^2 c_C^2}{q_a c_{A_{in}}} \\
 \text{s.t.} \quad & \dot{c}_A = 0 \\
 & \dot{c}_B = 0 \\
 & \dot{c}_C = 0 \\
 & W - W_{max} \leq 0, \quad (q_a + q_b) - q_{max} \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

avec W_{max} et q_{max} , les limites supérieures de la chaleur produite et du débit total respectivement.

Les conditions d'opération optimales correspondent à des débits d'entrées de $q_a = 7.62 \text{ L/h}$ et de $q_b = 13.1 \text{ L/h}$. À l'optimum, la contrainte sur la chaleur produite est active i.e. $W = W_{max}$ et la valeur de la fonction objectif est de 12.3 mol/h . Ici, la présence de trois réacteurs identiques dans le procédé est une nécessité pour pouvoir utiliser la méthode d'optimisation multi-unités puisque le problème contient deux entrées, q_A et q_B . Dans les exemples qui suivent, ces trois réacteurs seront désignés par des numéros soit, les réacteurs 0, 1 et 2.

3.6.1 Méthode multi-unités et fonction barrière

La méthode d'optimisation multi-unités avec une fonction barrière logarithmique fut tout d'abord utilisée. La méthode multi-unités avec fonction barrière se définit comme suit :

$$q_{a,1} = q_{a,0} + \Delta_{q_a} \quad (3.30)$$

$$q_{b,1} = q_{b,0} \quad (3.31)$$

$$q_{a,2} = q_{a,0} \quad (3.32)$$

$$q_{b,2} = q_{b,0} + \Delta_{q_b} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{a,0} = & -k_{mu}(J_1 - \alpha(\log(-(W_1 - W_{max}) + \log(-(q_{a,1} + q_{b,1} - q_{max})))) \\ & - J_0 - \alpha(\log(-(W_0 - W_{max}) + \log(-(q_{a,0} + q_{b,0} - q_{max})))) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{b,0} = & -k_{mu}(J_2 - \alpha(\log(-(W_2 - W_{max}) + \log(-(q_{a,2} + q_{b,2} - q_{max})))) \\ & - J_0 - \alpha(\log(-(W_0 - W_{max}) + \log(-(q_{a,0} + q_{b,0} - q_{max})))) \end{aligned} \quad (3.35)$$

où les indices 0, 1 et 2 représentent les réacteurs 0, 1 et 2 respectivement.

Les valeurs des paramètres ont été fixées comme suit :

- Excitation : $\Delta = \Delta_{q_a} = \Delta_{q_b} = 0.1 \frac{L}{h}$
- Gain d'adaptation : $k_{mu} = 100 \frac{molh^2}{L^2}$
- Gain de la fonction barrière : $\alpha = 0.1$

Les résultats de simulation sont présentés à la Figure 3.6. Ces résultats montrent que le point d'opération optimal est atteint en environ 1.5 heures et la contrainte de chaleur est approchée avec un écart d'environ 20 kJ/h (fixé par la valeur de α).

3.6.2 Méthode d'optimisation multi-unités et projection du gradient

La méthode d'optimisation multi-unités avec projection du gradient sur les contraintes actives fut également appliquée. Les lois de commande des différents états hybrides possibles sont détaillées ci-bas :

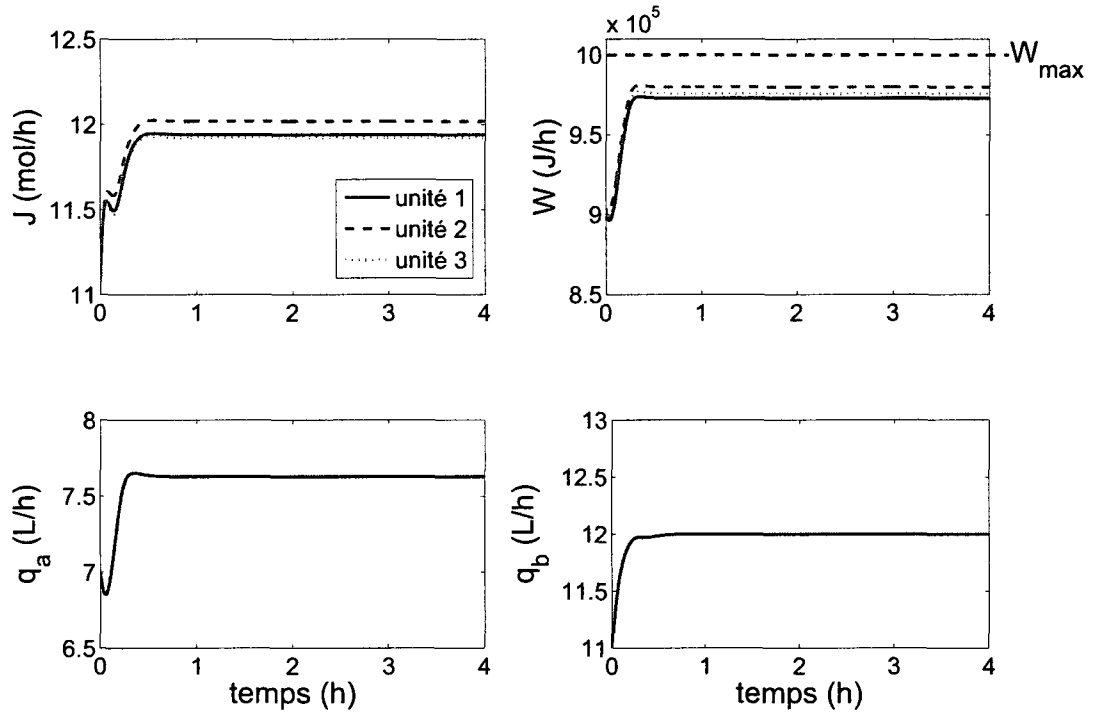


Figure 3.6 Résultats de la méthode d'optimisation multi-unités avec fonction barrière logarithmique

Si aucune contrainte n'est active :

$$\dot{q}_a = k_{mu} \frac{(J_1 - J_0)}{\Delta q_a} \quad (3.36)$$

$$\dot{q}_b = k_{mu} \frac{(J_2 - J_0)}{\Delta q_b} \quad (3.37)$$

Si la contrainte de chaleur de l'unité j est active :

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_a &= k_{mu} \left(\frac{\Delta q_a (W_2 - W_0)^2 (J_1 - J_0)}{(W_1 - W_0)^2 \Delta q_b^2 + (W_2 - W_0)^2 \Delta q_a^2} \right. \\
 &\quad - \frac{\Delta q_a (W_2 - W_0) (W_1 - W_0) (J_2 - J_0)}{(W_1 - W_0)^2 \Delta q_b^2 + (W_2 - W_0)^2 \Delta q_a^2} \\
 &\quad + \beta \frac{(W_1 - W_0) (W_{max} - W_j) \Delta q_a \Delta q_b^2}{(W_1 - W_0)^2 \Delta q_b^2 + (W_2 - W_0)^2 \Delta q_a^2} \\
 &\quad \left. \right) \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_b &= k_{mu} \left(\frac{J_2 - J_0}{\Delta q_b} \right. \\
 &\quad - \frac{(W_2 - W_0)^2 (J_2 - J_0) \Delta q_a^2}{\Delta q_b ((W_1 - W_0)^2 \Delta q_b^2 + (W_2 - W_0)^2 \Delta q_a^2)} \\
 &\quad - \frac{\Delta q_b (W_1 - W_0) (W_2 - W_0) (J_1 - J_0)}{(W_1 - W_0)^2 \Delta q_b^2 + (W_2 - W_0)^2 \Delta q_a^2} \\
 &\quad + \beta \frac{(W_2 - W_0) (W_{max} - W_j) \Delta q_a^2 \Delta q_b}{(W_1 - W_0)^2 \Delta q_b^2 + (W_2 - W_0)^2 \Delta q_a^2} \\
 &\quad \left. \right) \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

Si la contrainte de débit de l'unité j est active :

$$\dot{q}_a = k_{mu} \left(\frac{J_1 - J_0}{2\Delta q_a} - \frac{J_2 - J_0}{2\Delta q_b} \right) + k_s \frac{q_{max} - q_j}{2} \tag{3.40}$$

$$\dot{q}_b = k_{mu} \left(\frac{J_2 - J_0}{2\Delta q_b} - \frac{J_1 - J_0}{2\Delta q_a} \right) + k_s \frac{q_{max} - q_j}{2} \tag{3.41}$$

Si les deux contraintes sont actives :

$$\dot{q}_a = k_s \left(\frac{(W_{max} - W_j)\Delta q_b - (q_{max} - q_j)(W_2 - W_0)}{(W_1 - W_0)\Delta q_b - (W_2 - W_0)\Delta q_a} \right) \quad (3.42)$$

$$\dot{q}_b = k_s \left(\frac{(W_{max} - W_j)(-\Delta q_a) - (q_{max} - q_j)(W_1 - W_0)}{(W_1 - W_0)\Delta q_b - (W_2 - W_0)\Delta q_a} \right) \quad (3.43)$$

où W_j et $q_j = q_a + q_b$ représentent les mesures de chaleur et de débit maximal pour l'unité j respectivement. La non-singularité des lois de commande pour le cas où les deux contraintes sont actives est assurée par l'hypothèse d'indépendance linéaire des contraintes en tout point d'opération.

Pour l'application de la méthode multi-unités avec projection du gradient, les paramètres suivants ont été utilisés :

- Excitation : $\Delta = \Delta_{q_a} = \Delta_{q_b} = 0.1 \frac{L}{h}$
- Gains d'adaptation : $k_{mu} = 100 \frac{molh^2}{L^2}$, $k = 10 \frac{molh^2}{L^2}$
- Gain de suivi des contraintes : $k_s = 4$

Les résultats obtenus sont présentés à la Figure 3.7. Au départ, le système évolue sans aucune contrainte active. Ensuite, l'unité 1 atteint la contrainte de chaleur et à partir de ce moment, les lois de commande des équations (3.38,3.39) sont utilisées avec $W_j = W_1$. Un dépassement de la contrainte de chaleur résultant de la dynamique du procédé est évité par l'introduction d'un facteur d'atténuation de 0.99 dans la détection de la contrainte active, i.e. en utilisant la condition $W_1 = 0.99W_{max}$ comme seuil de détection de la contrainte active. Le changement d'un état hybride, où aucune contrainte n'est active, vers celui où la contrainte de chaleur est active est alors effectué à un seuil légèrement plus bas évitant ainsi le dépassement de la contrainte de chaleur.

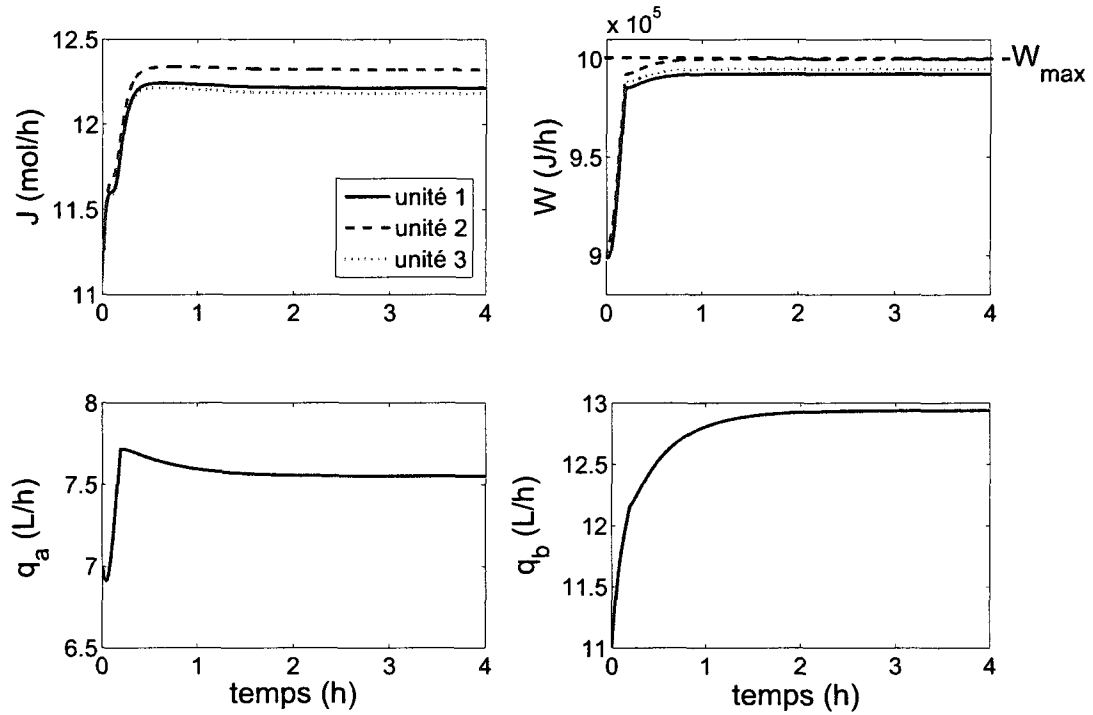


Figure 3.7 Résultats de la méthode d'optimisation multi-unités avec projection du gradient sur les contraintes actives

Le Tableau 3.1 dresse une comparaison des résultats obtenus en utilisant la fonction barrière à ceux obtenus par la projection du gradient.

Ces résultats confirment qu'une meilleure valeur de la fonction objectif est obtenue par la projection du gradient comparativement à la fonction barrière, en étant plus proche de la contrainte active. Toutefois, puisque les entrées des différentes unités dans la méthode multi-unités sont non-identiques, un seul des réacteur atteint réellement la contrainte alors que les autres réacteurs sont distants de la contrainte d'une valeur déterminée par la valeur du paramètre Δ .

Tableau 3.1 Fonction objectif, contraintes et entrées des unités selon les différentes stratégies d'optimisation

	Réacteur	q_a (L/h)	q_b (L/h)	J (mol/h)	W (kJ/h)
Méthode multi-unités	0	7.63	12	11.94	973
avec	1	7.73	12	12.02	980
fonction barrière	2	7.63	12.1	11.92	976
Méthode multi-unités	0	7.55	12.94	12.21	992
avec	1	7.65	12.94	12.32	1000
projection du gradient	2	7.55	13.04	12.18	995

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode de commande extrémale utilisant une projection du gradient sur les contraintes actives a été proposée. Il fut démontré que l'adaptation de la méthode de projection traditionnelle (Rosen, 1960) dans un contexte continu peut engendrer une boucle infinie dans la logique servant au choix de l'ensemble de contraintes actives. Une logique assurant un choix de contraintes actives menant à une direction de descente projetée faisable a été proposée. La preuve de convergence de la méthode de commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives utilisant cette logique a également été établie. La méthode d'optimisation multi-unités fut modifiée pour permettre l'optimisation sous contraintes inégalité en utilisant la projection du gradient sur les contraintes actives. L'introduction d'un terme additionnel dans la loi de commande extrémale assure de garder les contraintes actives. Finalement, un exemple de simulation a permis de constater que l'utilisation de la méthode d'optimisation multi-unités avec projection du gradient sur les contraintes actives plutôt que l'utilisation d'une fonction barrière réside en une meilleure valeur de la fonction objectif au point d'équilibre. Ce gain en performance est attribuable au fait que le point d'équilibre se situe directement sur la contrainte lorsqu'un algorithme de projection du gradient sur les contraintes actives est utilisé.

CHAPITRE 4

MAXIMISATION DE LA PUISSANCE PRODUITE PAR DES PILES À COMBUSTIBLES MICROBIENNES : RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

L'épuisement des ressources et les enjeux environnementaux actuels contribuent à l'urgence de développer de nouvelles sources d'énergie renouvelable. Parmi les différentes technologies existantes, telles que les systèmes photovoltaïques ou éoliens, les piles à combustible sont devenues une source d'énergie renouvelable envisageable d'un point de vue technologique. Toutefois, la principale limite dans l'utilisation des piles à hydrogène est la nécessité de produire de l'hydrogène et d'assurer son transport jusqu'au point d'utilisation. Les piles à combustible microbiennes (ou MFC pour Microbial Fuel Cells) représentent une alternative intéressante puisqu'elles permettent de générer de l'électricité à partir de différentes sources de carbone contenant de faibles concentrations de matière organique comme c'est le cas des eaux usées notamment (Allen et Benetto, 1993; Logan et al., 2006).

4.1 La pile à combustible microbienne

Le fonctionnement d'une pile à combustible microbienne est schématisé à la Figure 4.1. Une pile à combustible microbienne consiste en un bioréacteur aérobique dans lequel des bactéries agissent comme catalyseur dans une réaction d'oxydoréduction. Les bactéries, lorsque nourries avec des composés organiques croissent et maintiennent leur métabolisme. La bio-réaction qui caractérise la croissance des bactéries produit du CO_2 et de l'eau. Le réacteur contient une anode et une cathode et la croissance

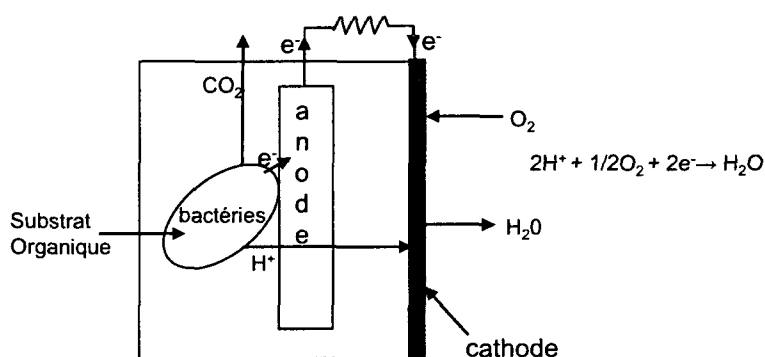


Figure 4.1 Schéma d'une pile à combustible microbienne

de bactéries qui se produit autour de l'anode libère des électrons à travers un circuit externe reliant ces électrodes. La réaction est complétée du côté de la cathode (Bond et Lovley, 2005; Reguera et al., 2005).

Depuis la fin des années 1990, époque à laquelle débute la recherche intensive sur les piles à combustible microbiennes, la densité de puissance produite par ces piles a augmenté de plusieurs ordres de grandeur (Logan et Regan, 2006). Malgré cette augmentation, la densité de puissance atteignable actuellement par une seule pile microbienne est faible et la tension disponible à ses bornes est limitée à environ 0.3-0.5 volt. Conséquemment, la recherche se poursuit dans le but d'augmenter la puissance électrique délivrée par ce type de piles. Cette recherche vise notamment à améliorer la conception du réacteur que ce soit en utilisant une cathode à air (Liu et Logan, 2004), un réacteur tubulaire (Zuo et al., 2007; Rabaey et al., 2005) ou à courant ascendant (Rabaey et Verstraete, 2005; Tartakovsky et Guiot, 2006), en améliorant la conception des électrodes (Yu et al., 2007; He et Angenent, 2006) ou encore en améliorant la conception du système où une série de piles à combustible microbiennes est utilisée pour augmenter la tension et/ou la puissance électrique délivrée (Alterman et al., 2006; Oh et Logan, 2007).

La puissance électrique fournie par des piles à combustible microbiennes dépend de

plusieurs paramètres opérationnels. La concentration et la composition de la source de carbone, la température et le pH sont autant de facteurs pouvant faire varier la résistance interne de ce type de source électrique et ainsi affecter la puissance fournie (Alterman et al., 2008; Gil et al., 2003).

4.2 Suivi du point maximal de puissance en temps réel

Une des méthodes les plus simples d'augmenter la puissance d'une source électrique est de toujours maintenir une charge électrique correspondant au maximum de puissance fournie par la pile. A mesure que le courant soutiré de la pile augmente, la tension à ses bornes diminue et la puissance maximale fournie est obtenue quand la résistance externe (charge) est égale à la résistance interne de la source. Une résistance externe différente de la résistance interne peut engendrer une perte en puissance de plus de 50 %.

4.2.1 Formulation du problème d'optimisation

Le problème considéré vise la maximisation en temps réel de la puissance électrique délivrée par deux piles à combustible microbiennes semblables par l'ajustement des résistances variables branchées à leurs bornes. Le problème d'optimisation est formulé comme suit :

$$\max_R Q = \frac{E^2}{R} \quad (4.1)$$

où Q représente la puissance délivrée par la pile à combustible microbienne à travers

la résistance variable externe R et E représente le voltage mesuré aux bornes de la pile à combustible microbienne. Le problème d'optimisation en temps réel vise donc la maximisation de la puissance Q par l'ajustement de la résistance externe R à tout instant.

Des méthodes d'optimisation en temps réel sont souvent utilisées pour maximiser la puissance de différents types de source d'électricité tels que les systèmes photovoltaïques (Leyva et al., 2006) ou les piles à hydrogène (Zhong et al., 2008). Le suivi en temps réel du point maximal de puissance est désigné dans la littérature par l'expression "maximum power point tracking" ou l'acronyme "MPPT". Une méthode couramment utilisée consiste à insérer un convertisseur DC/DC et une batterie tampon entre la source et la charge électrique et à ajuster le rapport cyclique ou le courant soutiré à une valeur optimale par le biais d'une méthode de suivi du point maximal de puissance (maximum power point tracking- MPPT) (Boico et Lehman, 2006). La formulation du problème présentée ci-haut est légèrement différente puisque le potentiomètre externe est utilisé comme variable manipulée. Ce choix a été fait afin de simplifier la procédure expérimentale tout en permettant l'essai des différents algorithmes d'optimisation en temps réel retenus. En pratique, les mêmes algorithmes seraient utilisés avec un convertisseur DC/DC avec comme variable manipulée, le rapport de cycle de service ou encore le courant soutiré.

4.2.2 Méthodes utilisées

Différentes méthodes MPPT ont été utilisées pour des systèmes photovoltaïques dans la littérature. Une classe de méthodes MPPT utilise un modèle fondamental du panneau solaire pour calculer numériquement l'impédance de la source (Wyatt et Chua, 1983). L'inconvénient majeur de cette approche est la complexité du modèle requis et l'incertitude de plusieurs de ses paramètres. Dans le contexte des MFC, cette

approche est difficilement envisageable notamment à cause de la complexité et de la nature fortement non-linéaire des cinétiques microbiennes (Batstone et al., 2002). Il est également possible de maximiser la puissance fournie en temps réel sans avoir recours à un modèle fondamental. Les méthodes de Perturbation/Observation et du Gradient sont des méthodes d'optimisation en temps réel sans modèle fondamental utilisées couramment comme MPPT pour les systèmes photovoltaïques (Boico et Lehman, 2007). Ces méthodes considèrent la dynamique du système à optimiser comme étant très rapide et utilisent une perturbation temporelle pour estimer le gradient. Cette dynamique rapide est confirmée pour les systèmes photovoltaïques puisque le temps de réponse de tels systèmes est de l'ordre de quelques secondes tout au plus. La simplicité et la robustesse de la méthode Perturbation/Observation en font une méthode largement utilisée dans les MPPT alors que la méthode du gradient permet une convergence plus rapide (Xia et al., 2007).

La principale différence entre le comportement des systèmes photovoltaïques et les piles à combustible microbiennes réside en un temps de réponse beaucoup plus long dans le cas des MFC. Ce temps de réponse peut varier de l'ordre de minutes à douzaines de minutes. L'application des méthodes MPPT habituelles aux MFC peut mener à une convergence beaucoup plus lente en raison d'un temps de réponse lent. Comme la méthode d'optimisation multi-unités présente une convergence plus rapide pour des systèmes lents, elle devrait offrir une meilleure performance que les méthodes de perturbation/observation et du gradient lorsque utilisée pour maximiser la puissance de piles à combustible microbiennes. Les résultats expérimentaux émanant de l'application des méthodes de perturbation/observation, du gradient et multi-unités à la maximisation de puissance électrique de 2 piles à combustible microbiennes sont présentés dans ce chapitre.

Méthode de perturbation/observation

La méthode de perturbation/observation appelée aussi "switching" (Blackman, 1962; Sternby, 1980) est largement utilisée pour le suivi du point maximal de puissance des systèmes alimentés par énergie solaire (Hua et Shen, 1998). Elle consiste à perturber le système en appliquant une variation d'amplitude constante à son entrée et à ajuster le signe de la prochaine perturbation en accordance avec le signe du gradient estimé. Ce gradient est estimé par une méthode de différences finies, soit en évaluant la différence entre la valeur de la fonction objectif (après le changement d'entrée) et la valeur d'entrée précédente (avant le changement d'entrée). Puisque le système à optimiser est un système dynamique, il est important d'atteindre le régime permanent entre chaque perturbation d'entrée pour obtenir une estimation valable du gradient.

Cette méthode se résume par les équations suivantes :

$$R(k+2) = \begin{cases} R(k+1) + \Delta R & \text{si } \frac{Q(k+1)-Q(k)}{R(k+1)-R(k)} \geq 0 \\ R(k+1) - \Delta R & \text{si } \frac{Q(k+1)-Q(k)}{R(k+1)-R(k)} < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

où ΔR représente la perturbation sur l'entrée R , Q la puissance de sortie et k l'index d'itération. Lorsque $k \rightarrow \infty$, avec la présence de la perturbation constante ΔR , les valeurs de résistance oscilleront autour d'un point d'équilibre moyen, R^* , avec une amplitude de ΔR :

$$R(k) = \begin{cases} R^* + \Delta R \\ \text{ou} \\ R^* - \Delta R \end{cases} \quad (4.3)$$

De plus, puisque ΔR est le pas minimal pouvant être effectué, la distance maximale

entre le point d'équilibre moyen (R^*) et l'optimum réel (R^{opt}) est $\frac{\Delta R}{2}$:

$$|R^* - R^{opt}| \leq \frac{\Delta R}{2}$$

Une plus grande valeur de ΔR peut être utilisée pour augmenter la vitesse de convergence, mais ceci entraînera une erreur d'estimation de la résistance optimale et introduira des oscillations plus importantes autour du point d'équilibre. Le choix du paramètre ΔR repose sur un compromis entre la vitesse de convergence et la précision.

Méthode du gradient

La méthode du gradient (Nocedal et Wright, 1999) utilise également une perturbation d'amplitude constante pour estimer le gradient. La principale différence entre cette méthode et la méthode de perturbation/observation est que l'amplitude du pas d'optimisation est ici proportionnelle à la valeur du gradient estimé. La méthode du gradient est décrite par les équations suivantes :

$$R(k+1) = R(k) + \Delta R \quad (4.4)$$

$$R(k+2) = R(k+1) + k_g \frac{Q(k+1) - Q(k)}{R(k+1) - R(k)} \quad (4.5)$$

où k_g est un gain approprié. Chaque itération de cette méthode consiste en deux étapes :

- un changement d'amplitude constante pour évaluer le gradient
- un changement d'amplitude variable proportionnelle à ce gradient estimé

Lorsque $k \rightarrow \infty$, cette méthode oscillera également autour d'un point d'équilibre mais cette fois avec une amplitude réduite de moitié par rapport à la méthode de

perturbation/observation :

$$R(k) = \begin{cases} R^* + \frac{\Delta R}{2} \\ \text{ou} \\ R^* - \frac{\Delta R}{2} \end{cases} \quad (4.6)$$

Contrairement à la méthode de P/O, le point d'équilibre moyen ne contient pas d'erreur cette fois, i.e. $R^* = R^{opt}$. La vitesse de convergence de la méthode du gradient peut être améliorée en choisissant une valeur de gain plus grande. Toutefois, un gain trop grand peut mener à l'instabilité et la principale difficulté consiste à faire un choix judicieux de ce paramètre. De plus, la valeur du gain est intimement liée à la courbure de la caractéristique statique de la puissance qui peut évoluer dans le temps.

4.3 Matériaux et méthodes

Les expériences ont été effectuées avec deux piles à combustibles microbiennes sans membranes, à débit air-cathode continu. Chaque pile fut construite avec une série de plaques en polycarbonate comme décrit dans (Tartakovsky et al., 2008). Les cellules étaient munies de lignes d'alimentation, d'effluent, de liquide de recirculation et de sorties de gaz comme illustré à la Figure 4.2.

Le détail des matériaux et méthodes utilisés pour le montage expérimental est fourni à l'Annexe VI.

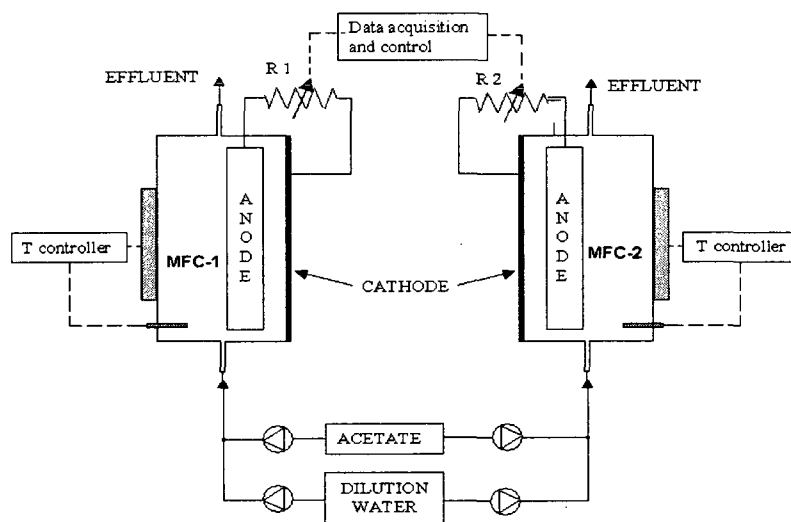


Figure 4.2 Montage expérimental des deux piles à combustible microbiennes

4.4 Optimisation multi-unités de la puissance

Avant de procéder aux tests d'optimisation, les deux MFC ont été opérées avec une concentration d'acétate de $137.5 \text{ mg}/L_A h$ ($A = \text{volume anodique}$), à une température de 23°C et avec une résistance externe de 200Ω . Sous ces conditions, une performance stable fut atteinte avec une puissance de $1\text{-}1.2 \text{ mW}$. La concentration d'acétate dans l'effluent du réacteur a été mesurée à $300\text{-}400 \text{ mg}/\text{L}$ assurant ainsi une condition de substrat non-limitante.

4.4.1 Courbes de polarisation

Une courbe de polarisation décrit le comportement du voltage de la pile à combustible microbienne en fonction du courant en régime permanent. Cette courbe représente les pertes irréversibles à partir du voltage idéal de la pile soit les pertes ohmiques qui sont causée par la résistance ionique, la résistance électronique et les résistances de contact (Logan et al., 2008).

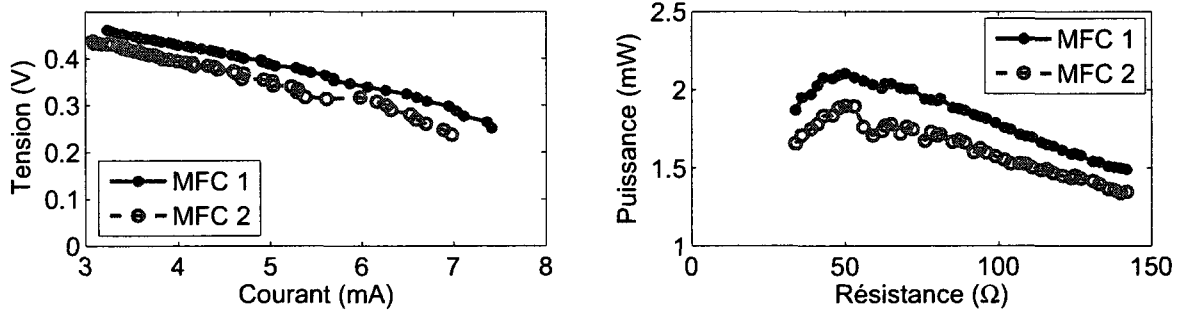


Figure 4.3 Courbes de polarisation des deux piles à combustible microbiennes

Ces courbes ont été obtenues pour chaque pile en variant successivement la valeur de la résistance externe reliée à chacune des piles. Tout d'abord, les résistances ont été fixées à une valeur de 142Ω puis ont été graduellement diminuées jusqu'à une valeur de 12Ω par échelons de 2Ω . Un intervalle de 10 minutes a été alloué entre chaque changement de résistance. Les courbes de polarisation obtenues pour chaque pile sont présentées à la Figure 4.3.

Les parties linéaires de chaque courbe de polarisation (Figure 4.3 A) ont été utilisées pour identifier les valeurs des résistances internes, lesquelles sont estimées à 45Ω et 47Ω pour les MFC 1 et 2 respectivement. Le maximum de puissance est obtenu lorsque les résistances externes sont égales aux résistances internes des MFC. On constate que les résistances optimales des deux piles sont les mêmes et donc $\beta=0$ dans l'équation (2.2). Toutefois, la Figure 4.3B permet de constater que les puissances maximales correspondant à ces résistances optimales ne sont pas les mêmes et ainsi, $\gamma \neq 0$ dans l'équation (2.2). Finalement, les courbures autour des points optimaux sont identiques i.e., $\bar{J}(u) \simeq 0$ et l'allure convexe de la courbe de polarisation souligne le besoin d'optimisation.

Une comparaison des courbes de polarisation obtenues en diminuant la résistance externe de 142Ω à 14Ω à celles obtenues en augmentant la résistance externe de 14Ω à

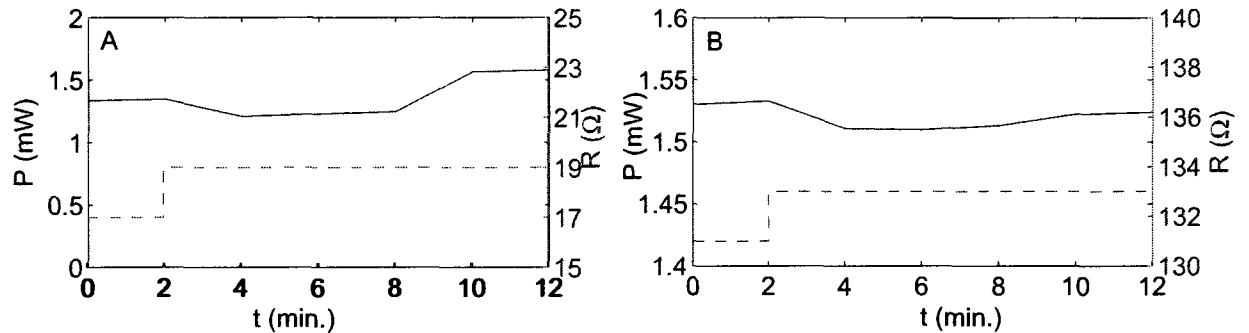


Figure 4.4 Variations de puissance obtenue sur la pile 1 suite à des changements de résistance A) pour des valeurs inférieures à la résistance interne B) pour des valeurs supérieures à la résistance interne

142 Ω ont donné des résultats similaires à la seule exception que la courbe provenant de l'augmentation de la résistance était légèrement inférieure à la courbe provenant d'une diminution de la résistance. Cette observation laisse croire que le temps de 10 minutes alloué entre chaque changement de valeur de résistance n'est pas suffisant pour que les MFC atteignent leur régime permanent. Afin de mieux comprendre la dynamique des piles, des réponses à l'échelon furent obtenues pour différentes valeurs de résistances (Figure 4.4). Ces tests ont permis d'estimer un temps de réponse d'environ 15-20 minutes. Ce temps de réponse est le reflet des limites de transformation du substrat et du transfert d'électrons par les micro-organismes. (Logan et al., 2006; Rabaey et al., 2004; Oh et Logan, 2007).

Une augmentation de la résistance externe réduit immédiatement la puissance de sortie et cette diminution instantanée est suivie d'une transition plus lente à un nouveau régime permanent. Ce nouveau régime permanent peut être soit supérieur ou inférieur au point de puissance avant la perturbation, dépendamment de la région d'opération. Lorsque la valeur de la résistance externe est inférieure à la valeur optimale, une augmentation de cette résistance mène à une augmentation de la puissance en régime permanent (Figure 4.4A) alors que pour une résistance inférieure à

la résistance optimale, une augmentation de cette résistance mène à une diminution de la puissance en régime permanent (Figure 4.4B). La dynamique du système se comporte comme celui d'un système à phase minimale ou celui d'un système à phase non-minimale selon que la résistance externe est inférieure ou supérieure à la résistance interne. Ce type de comportement est souvent observable pour des systèmes dynamiques non-linéaires possédant un optimum (Van De Vusse, 1964).

4.4.2 Résultats expérimentaux

Ces tests préopératoires ont permis de constater que les deux piles à combustible présentent des dynamiques presque identiques. Ce constat permet l'application de la méthode d'optimisation multi-unités à ce montage expérimental. Puisque les résistances internes des deux MFC sont identiques, mais que les puissances optimales diffèrent, la méthode d'optimisation multi-unités est appliquée au système avec un correcteur $\hat{\gamma}$ uniquement, avec adaptation séquentielle. Les lois de commandes suivantes ont été utilisées :

$$R_1(k) = R(k) \quad (4.7)$$

$$R_2(k) = R(k) + \Delta d_{mu} - \hat{\beta} \quad (4.8)$$

$$R(k+1) = R(k) - \frac{k_{mu}}{\Delta} (P_2(k) - P_1(k) - \hat{\gamma}) d_{mu} \quad (4.9)$$

$$\hat{\gamma}(k+1) = (P_2(k) - P_1(k))(1 - d_{mu}) \quad (4.10)$$

avec $\hat{\beta} = 0$ et d_{mu} défini comme suit :

$$d_{mu} = \begin{cases} 1 & \text{if } i(T_1 + T_2) \leq t \leq i(T_1 + T_2) + T_1 \\ 0 & \text{if } i(T_1 + T_2) + T_1 \leq t \leq (i + 1)(T_1 + T_2) \end{cases} \quad (4.11)$$

où $i \in \mathbb{Z}$. Ici, la période T_1 n'est pas été fixée à une valeur précise. C'est plutôt la valeur du gradient estimé qui détermine la fin de la période d'adaptation multi-unités. Ainsi, lorsque le gradient estimé est suffisamment faible, la période d'adaptation multi-unités prend fin et la période d'adaptation de $\hat{\gamma}$ débute. De plus, durant la période variable T_1 , il peut, si nécessaire, y avoir plusieurs estimations successives du gradient. Un délai de 3 minutes est imposé entre chacune de ces estimation du gradient durant l'adaptation multi-unités. La période T_2 est également fixée à 3 minutes. Comme $\beta = 0$, le choix de Δ n'influence pas la stabilité du système. La valeur de Δ est fixée à 2Ω , valeur de changement minimal techniquement permise par le type de résistance digitale utilisée. Les gains d'adaptation sont fixés par essais et erreurs à des valeurs de $k_{mu} = 90 \Omega^2/mW$ et $k_\gamma = 1$. De plus, une moyenne effectuée sur les 4 dernières valeurs lues est utilisée pour les mesures de tension aux bornes de la résistance externe.

La valeur initiale des résistances externes est de 140Ω pour les deux MFC. La Figure 4.6 contient les résultats obtenus avec la méthode d'optimisation multi-unités. En environ 1h, les résistances externes ont atteint des valeurs voisines de l'optimum de chaque pile : 34Ω pour la MFC 1 et 36Ω pour la MFC 2 fournissant respectivement des puissances de 2.045 mW et 2.11 mW.

Une comparaison des résistances internes estimées en utilisant la courbe de polarisation (Figure 4.3 : 45Ω pour MFC 1 et 47Ω pour MFC 2) avec les valeurs optimales obtenues par la méthode multi-unités (34Ω pour la MFC 1 et 36Ω pour la MFC 2) dénote une différence d'environ 10Ω , qui est attribuable à l'estimation de $\hat{\gamma}$. On peut constater en observant la courbe de polarisation (Figure 4.3) que la valeur de

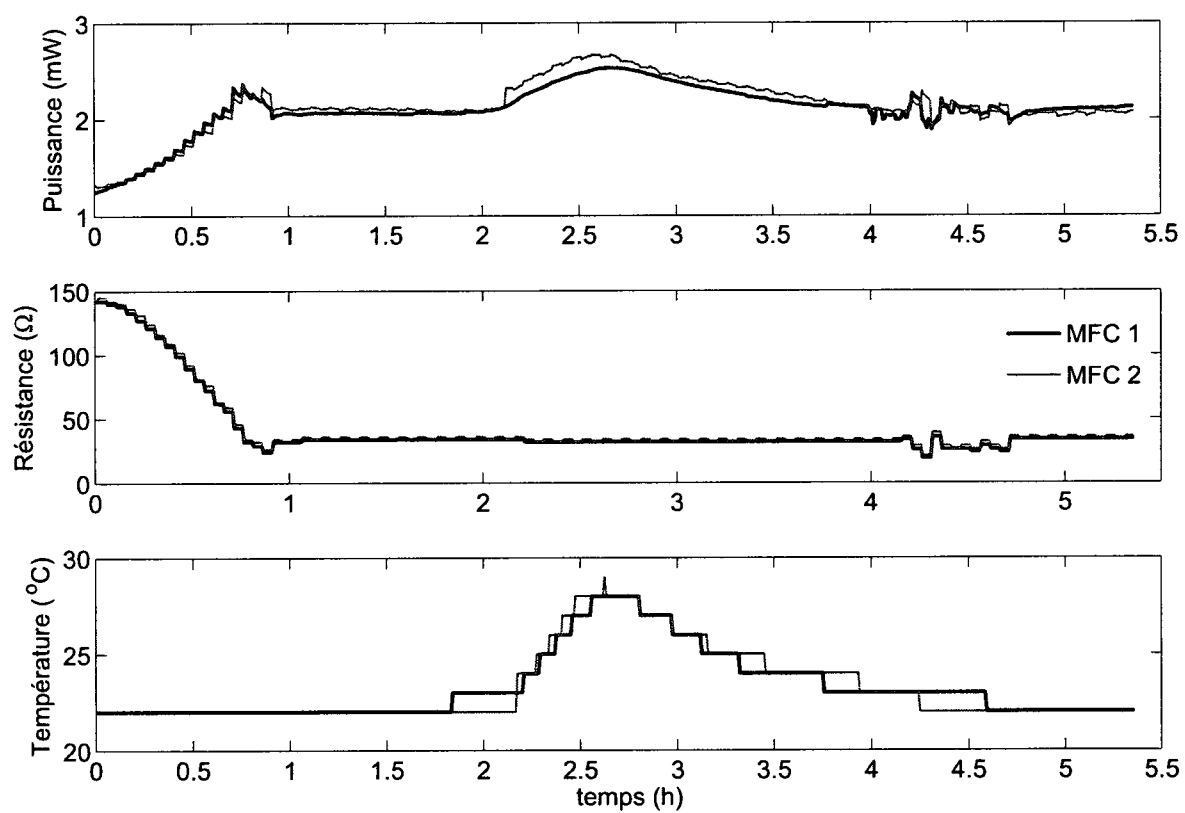


Figure 4.5 Résultat de l'optimisation multi-unités des deux MFC

γ n'est pas constante mais varie selon la valeur de la résistance. Donc, une valeur de γ calculée à une certaine valeur de résistance n'est pas exacte pour d'autres valeurs de résistance.

De plus, l'estimation de $\hat{\gamma}$ est fait avec un intervalle de temps de 3 minutes, temps auquel le régime permanent n'est pas encore atteint (voir Figure 4.4). Comme R_1 est augmenté et R_2 est diminué pour rejoindre la même valeur, les dynamiques des deux MFC sont opposées. Lors de l'estimation de $\hat{\gamma}$, les puissances s'additionnent plutôt que de s'annuler. La précision de l'estimation de l'optimum pourrait être améliorée en allouant un temps supérieure (T_2) pour l'estimation du correcteur $\hat{\gamma}$.

Après convergence du système vers l'optimum, une perturbation en température fut introduite comme indiqué à la Figure 4.5 ($t = 1.9$ h). Le point de consigne des contrôleurs de température fut fixé à 28°C pour les deux MFC. Lors de l'augmentation de température, les valeurs optimales ont légèrement diminué (de $2\ \Omega$). Après le retour du point de consigne à 22°C , l'algorithme multi-unités a ajusté les résistances externes à leur valeur précédente.

La réponse de la méthode multi-unités à une telle perturbation est intéressante. Malgré une augmentation importante de la puissance lors de la perturbation en température, la méthode multi-unités ne change pas de façon significative la valeur des résistances externes. Ceci s'explique par le fait que la différence en puissance (i.e. le gradient), reste la même principalement à cause des dynamiques identiques pour les deux piles. Toutefois, les deux MFC ne sont pas identiques et le retour à leur valeur précédant la perturbation en température est accompagnée de dynamiques différentes ayant pour conséquence d'introduire des fluctuations autour du point optimal (Figure 4.5). Malgré ces fluctuations, le système retourne éventuellement au point optimal.

Cette première série de résultats a permis de valider la performance de la méthode

d'optimisation multi-unités pour un système présentant une dynamique lente. Si une méthode à perturbation temporelle telle que la méthode de perturbation/observation était utilisée, le temps de convergence autour de l'optimum serait beaucoup plus grand en raison du délai nécessaire entre chacune des perturbations lors de l'estimation du gradient. Afin de vérifier expérimentalement ce point, une autre série d'essais expérimentaux a été réalisée. Ainsi, les performances des méthodes d'optimisation multi-unités, perturbation/observation et du gradient ont été comparées expérimentalement.

4.5 Comparaison des performances expérimentales de différentes méthodes d'optimisation

Le montage expérimental de la figure 4.2 et décrit à l'annexe F a encore une fois été utilisé. Cette fois, le volume de la chambre anodique était de 50 mL (plutôt que 100 mL) et la distance entre l'anode et la cathode fut fixée à 0.5 cm (plutôt que 1.5 cm). Les piles à combustible microbiennes ont été mises en opération en inoculant leur chambre anodique avec les agrégats anaérobiques et en les alimentant avec l'acétate à un débit de 200 mg/jour. Au départ, les valeurs des résistances externes furent fixées à 250 Ω . Une augmentation de la tension fut observée après 5 jours d'opération. Une période de 2 semaines fut allouée pour atteindre un régime permanent et les courbes de polarisation et les tests préopératoires furent alors effectués. Les courbes de polarisation présentées à la Figure 4.6 furent obtenues selon la méthode décrite précédemment. La distance plus petite entre les électrodes et/ou les variations dans l'épaisseur du biofilm semblent avoir contribué à l'amélioration de la performance des MFC en diminuant la valeur de leur résistance interne à environ 15 Ω pour la MFC 1 et 23 Ω pour la MFC 2. Les puissances maximales correspondant à ces valeurs sont respectivement de 3.5mW et 2.2 mW. De plus, les courbures des courbes de Q en

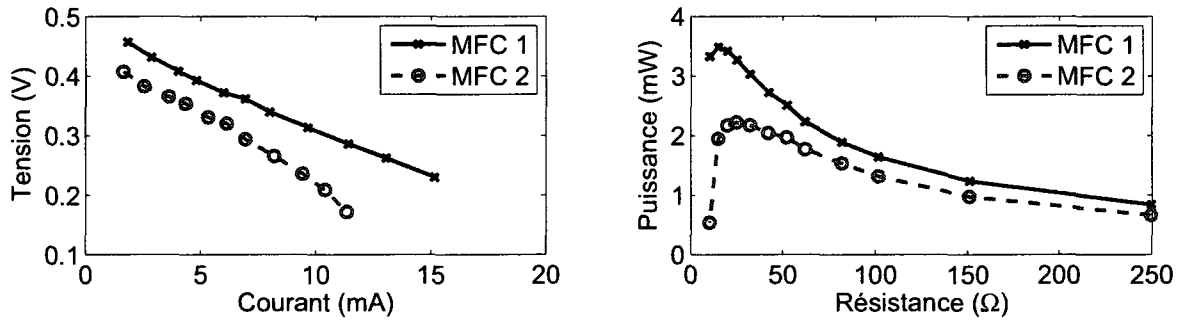


Figure 4.6 Courbes de polarisation des deux piles à combustible microbiennes

fonction de R ne sont pas identiques et ne sont pas constantes pour toutes les valeurs de R . Des réponses à l'échelon ont montré que le temps de réponse du système était cette fois d'environ 1 minute.

4.5.1 Convergence des méthodes utilisées

Méthode de Perturbation/Observation

La méthode de perturbation/observation a été appliquée avec un temps entre chaque adaptation fixé à 1 minute et une perturbation ΔR de 2Ω . Les deux potentiomètres ont été ajustés à une valeur de 70Ω avant l'optimisation. Les résultats présentés à la Figure 4.7 montrent que la puissance maximale est atteinte en environ 25 minutes.

Méthode du gradient

La méthode du gradient fut également appliquée en utilisant les mêmes conditions initiales, la même perturbation et le même délai d'adaptation que ceux utilisés dans le cas de la méthode de perturbation/observation. Les gains k_g ont été ajustés par essais erreurs à 150 et $200 \Omega^2/mW$ pour la pile 1 et la pile 2 respectivement. Comme en témoignent les résultats présentés à la Figure 4.8, la pile 2 converge vers son point

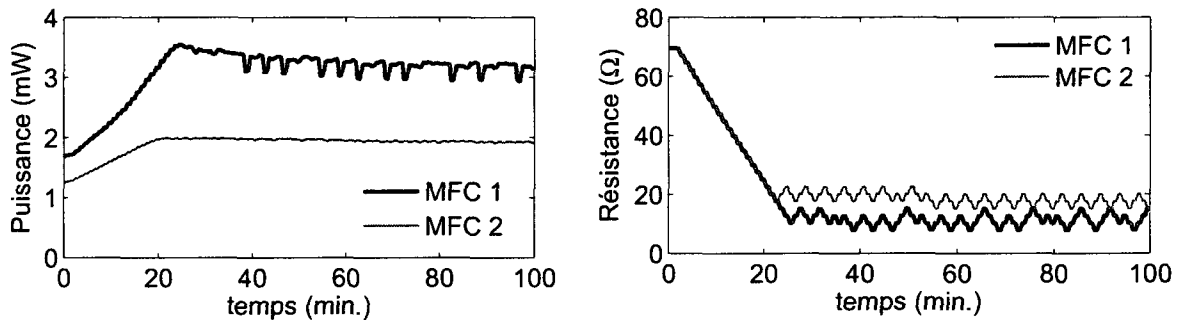


Figure 4.7 Résultats de la méthode de perturbation/observation

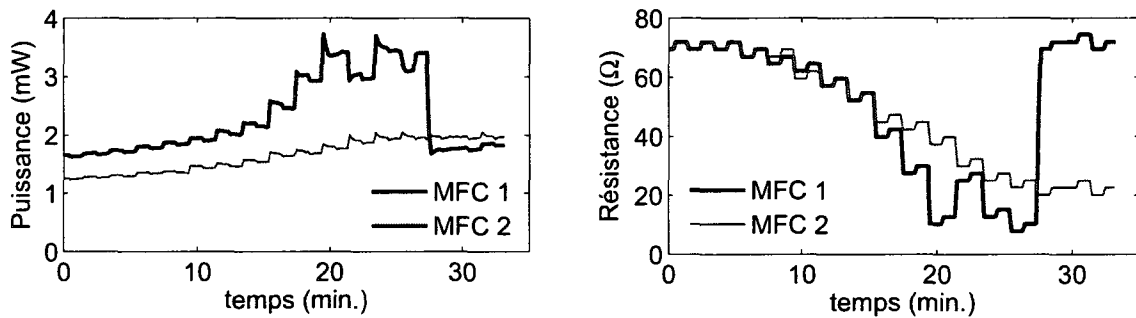


Figure 4.8 Résultats de la méthode de la plus forte pente

d'opération optimal en 30 minutes alors que la pile 1 ne peut converger. Plusieurs essais ont été faits en vain afin d'ajuster le gain pour la pile 1. Un gain trop faible ne permettait pas au système de quitter son point initial alors qu'un gain trop fort causait l'instabilité. Une large variation de courbure dans les courbes de polarisation explique le choix très restreint (voir même impossible) de valeurs de gain admissibles pour cette méthode.

Méthode d'optimisation multi-unités

Tout comme pour les expériences précédentes, la méthode d'optimisation multi-unités avec correcteur $\hat{\gamma}$ à adaptation séquentielle fut appliquée. Les équations (4.7-4.10) furent utilisées avec une valeur constante de $\hat{\beta} = -8 \Omega$. Les résultats de la

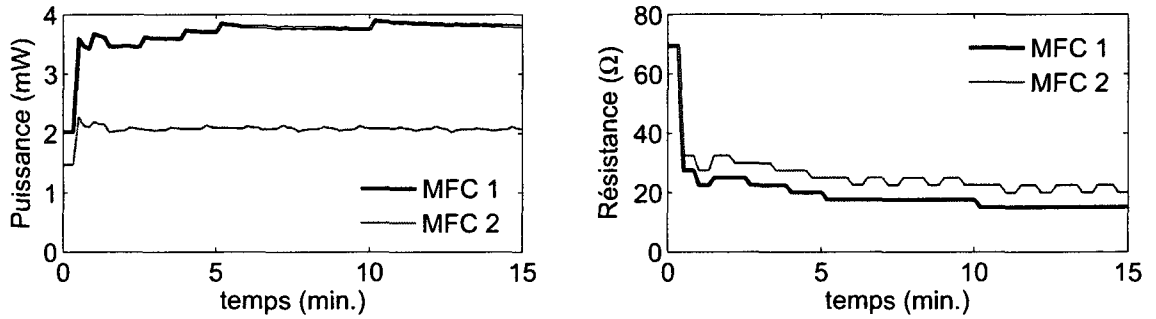


Figure 4.9 Résultats de la méthode multi-unités

méthode multi-unités sont présentés à la Figure 4.9. Ces résultats ont été obtenus en utilisant un délai entre les adaptations multi-unité de 30 secondes, une période pour l'estimation du correcteur $\hat{\gamma}$ de 1 minute, une valeur initiale pour le paramètre $\hat{\gamma}$ de -1.45 mW et un gain d'adaptation multi-unités k_{mu} de $40 \frac{\Omega^2}{mW}$. Pour ces tests, les mêmes valeurs présentées pour les deux méthodes précédentes ont été utilisées pour la perturbation soit $\Delta R = 2 \Omega$ et pour les valeurs initiales des potentiomètres digitaux externes ($R = 70 \Omega$). Comme prévu, avec la méthode multi-unités, le temps de convergence vers l'optimum est réduit significativement : la méthode multi-unités sans adaptation converge en environ 1 minute et le réglage final du correcteur $\hat{\gamma}$ se fait en environ 8 minutes.

4.5.2 Suivi de l'optimum en présence de perturbations

Comme en témoignent les résultats précédents, les méthodes de perturbation/observation et multi-unités sont capables d'atteindre les résistances externes optimales. Nous avons jugé intéressant d'étudier la capacité de ces deux méthodes à suivre ces valeurs optimales en présence de perturbations externes. Pour ce faire, deux types de perturbations ont été utilisées : (i) un changement de la concentration du substrat (perturbation rapide) et (ii) un changement de la température (perturbation lente).

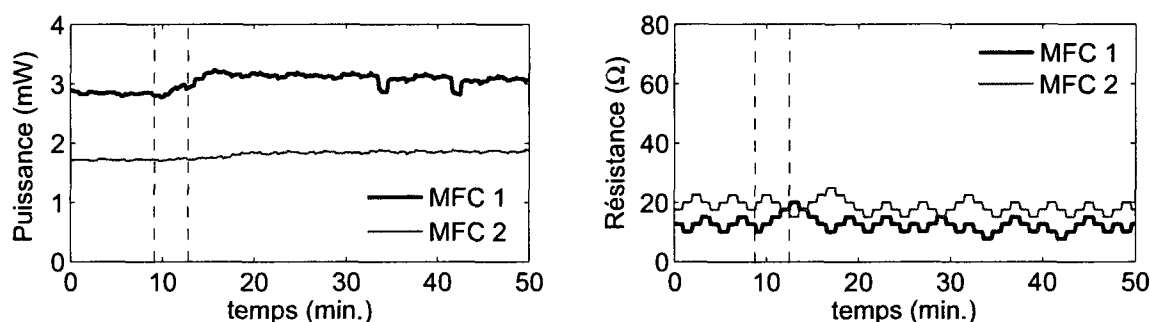


Figure 4.10 Réponse de la méthode perturbation/observation à un changement soudain de la concentration de substrat

Changement de la concentration du substrat

La perturbation rapide fut introduite dans le système en injectant 1 mL de solution d'acétate (contenant 40 g/L d'acétate) dans les chambres anodiques des MFC. La réponse de la méthode de perturbation/observation à ce changement est présentée à la Figure 4.10.

La concentration de substrat alimentant la pile 1 fut augmentée à l'instant $t = 9$ minutes et celle de la pile 2 à $t = 12$ min. Avant cette injection d'acétate, la concentration dans la chambre anodique était d'environ 200 mg/L, comme si le substrat ne limitait pas de façon significative les taux de réaction au test de démarrage. Conséquemment, l'augmentation en puissance observée dans les deux MFC fut modérée. Ces variations en puissance engendrent des variations de la valeur de la résistance externe. Toutefois, en raison des conditions de substrat non-limitant, la résistance optimale demeure inchangée et la méthode de perturbation/observation ramène la résistance externe à sa valeur originale.

La Figure 4.11 présente le comportement de la méthode multi-unités en présence de changement de la concentration du substrat. Une fois de plus, la concentration d'acétate au début du test était de 150-200 mg/L. Comme en témoigne cette figure,

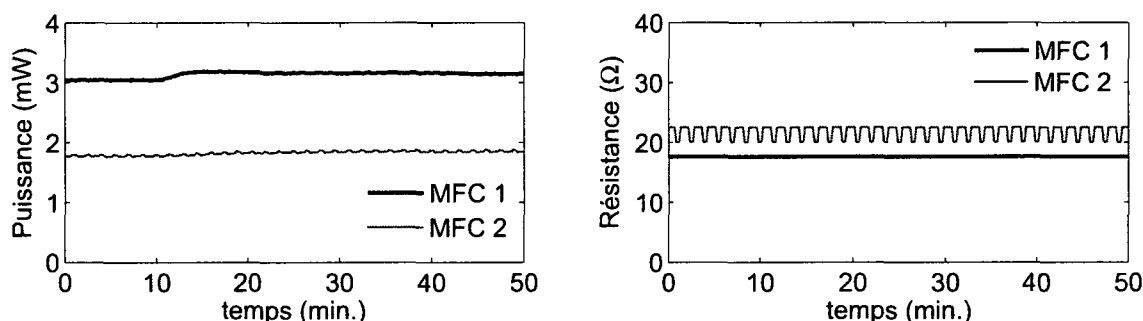


Figure 4.11 Réponse de la méthode multi-unités à un changement soudain de la concentration de substrat

les valeurs de résistances demeurent inchangées. D'un point de vue multi-unités, comme la puissance des deux unités augmente, leur différence, i.e. le gradient demeure inchangé et aucun changement de résistance n'est nécessaire.

Augmentation de la température à l'anode Les réponses des algorithmes d'optimisation à des changements de température ont également été obtenues. L'augmentation de la température consiste en une augmentation du point de consigne de température de 25 à 28 °C pour la pile 1 et de 25 à 31 °C pour la pile 2. Les Figures 4.12 et 4.13 présentent les réponses des deux algorithmes à de telles perturbations en température. Pour les deux MFC, la puissance augmente alors que la résistance interne décroît avec l'augmentation de la température. L'augmentation en puissance observée est en accord avec la dépendance de type Arrhenius des cinétiques microbiennes sur la température (Siegrist et al., 2002). Les résistances optimales décroissent légèrement comme en témoignent les résultats des Figures 4.12 et 4.13. Cette décroissance est moins visible pour la méthode de perturbation/observation principalement en raison des oscillations et du fait qu'une augmentation en puissance causée par une augmentation en température induit un comportement oscillatoire de la méthode.

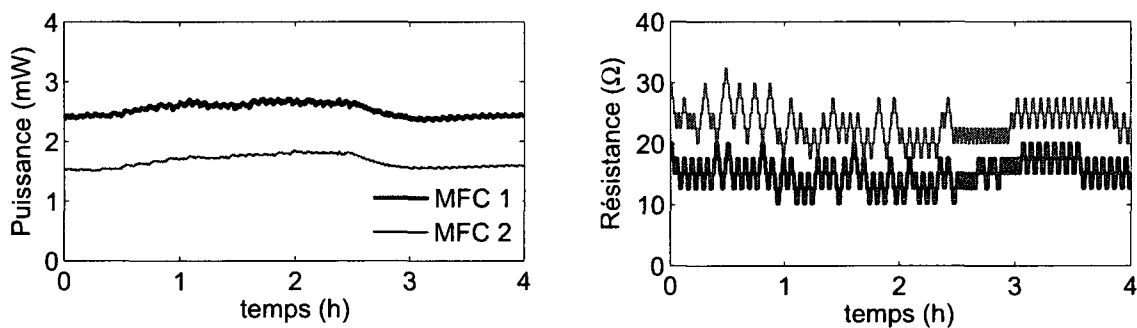


Figure 4.12 Réponse de la méthode perturbation/observation à une augmentation de la température

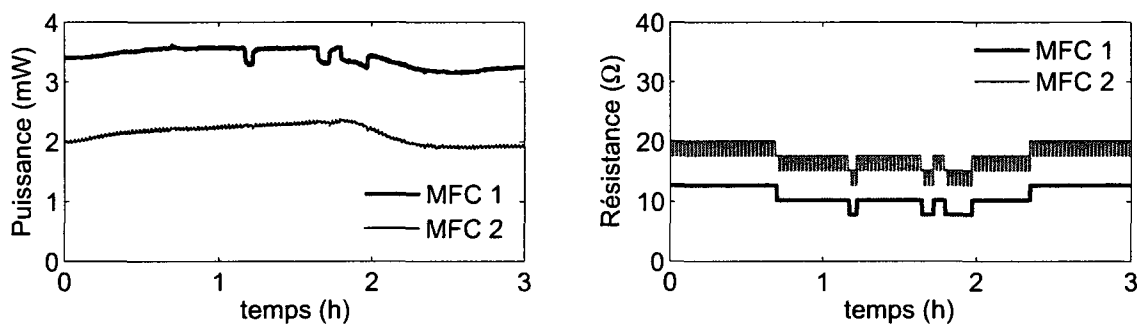


Figure 4.13 Réponse de la méthode multi-unités à une augmentation de la température

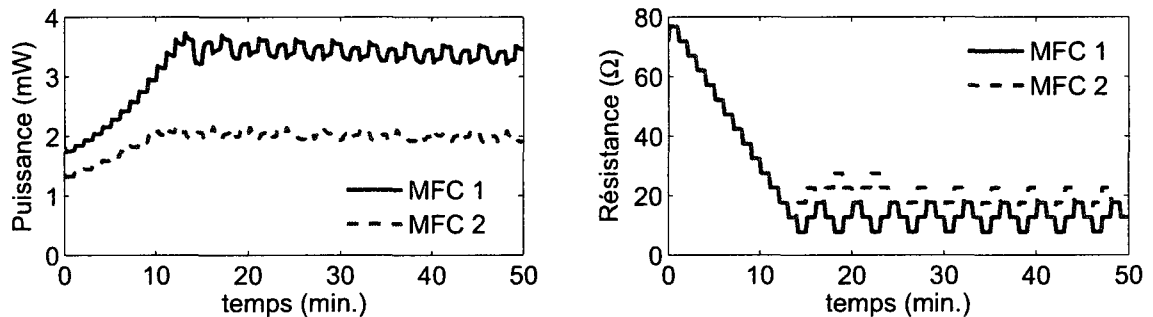


Figure 4.14 Réponse de la méthode Perturbation/observation avec une perturbation de 4 ohms

4.5.3 Influence du temps d'adaptation sur les méthodes d'optimisation

Méthode de perturbation/observation Les résultats obtenus jusqu'à présent montrent que le temps de convergence de la méthode de perturbation/observation est plus long que celui de la méthode multi-unités. Ce constat soulève une question quant à la possibilité de réduire le temps de convergence de la méthode perturbation/observation. Une façon de faire serait d'augmenter la valeur de ΔR afin de permettre de plus larges pas.

La méthode de perturbation/observation utilisant un ΔR de 4 Ω réduit le temps de convergence de moitié comparativement à celui obtenu avec un ΔR de 2 Ω , soit à 12.5 minutes (Figure 4.14). Toutefois, la réduction du temps de convergence cause de plus grandes oscillations autour de l'optimum. Le choix de ΔR repose sur un compromis à faire entre la vitesse de convergence et la précision de la valeur de la puissance optimale obtenue.

Une autre façon de réduire le temps de convergence de cette méthode est la réduction du délai entre chaque perturbation, i.e. l'augmentation de la fréquence des perturbations. Les Figures 4.15 à 4.17 présentent les résultats obtenus par la méthode de perturbation/observation appliquée avec un ΔR de 2 Ω et un délai entre chaque

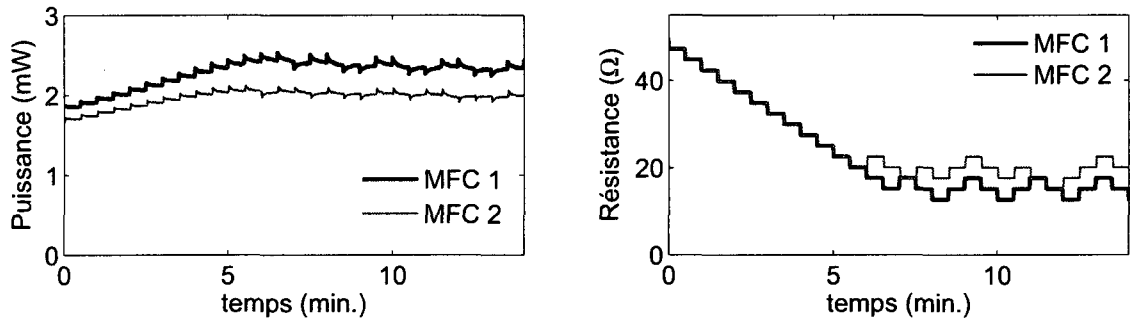


Figure 4.15 Réponse de la méthode P/O avec un délai de 30 secondes entre les perturbations

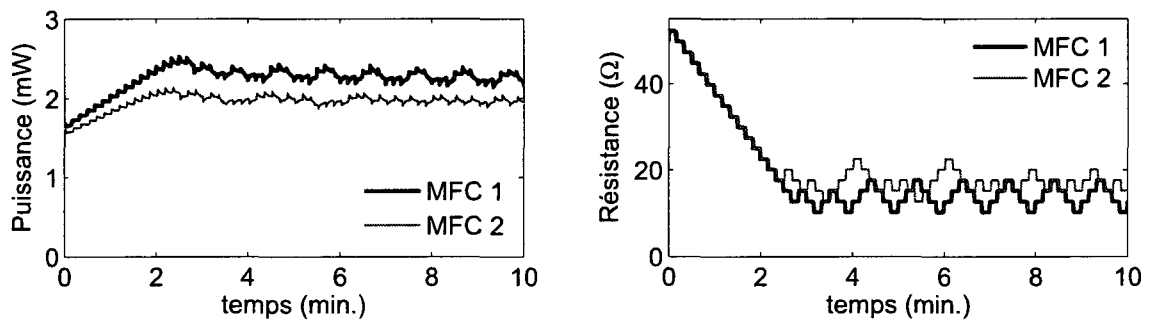


Figure 4.16 Réponse de la méthode P/O avec un délai de 10 secondes entre les perturbations

perturbation de 30 secondes, 10 secondes et 5 secondes, respectivement. Les résultats présentés dans ces 3 figures confirment que l'augmentation de la fréquence des perturbations réduit le temps de convergence : l'augmentation de la fréquence des perturbations diminue le temps de convergence de 6 minutes pour un délai de 30 secondes à 2.5 minutes pour un délai de 10 secondes et à 1.3 minutes pour un délai de 5 secondes.

Méthode multi-unités

Des tests similaires ont été effectués avec la méthode multi-unités en réduisant le temps entre chaque pas d'optimisation multi-unités. Les figures 4.18 à 4.20 montrent

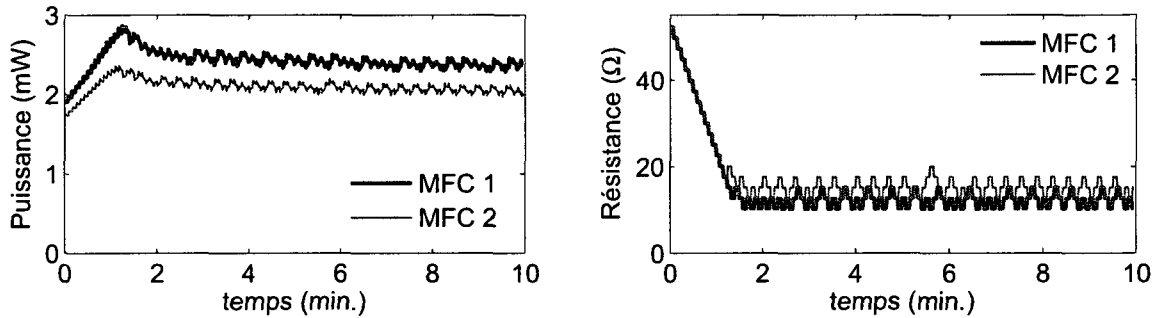


Figure 4.17 Réponse de la méthode P/O avec un délai de 5 secondes entre les perturbations

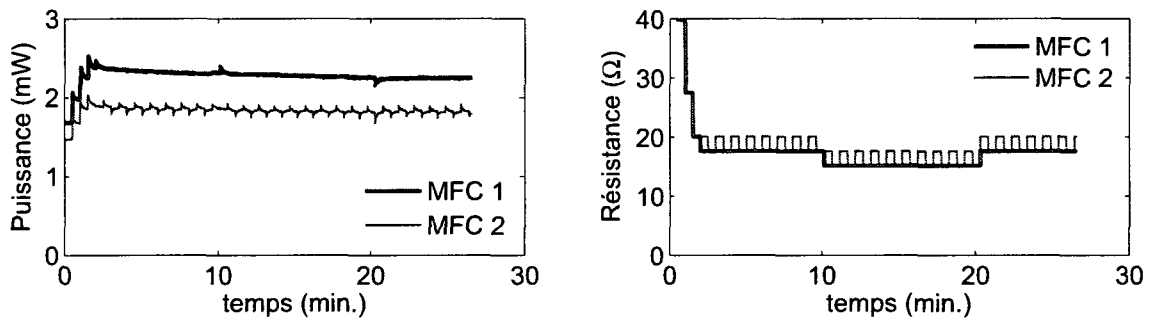


Figure 4.18 Réponse de la méthode multi-unités avec un délai de 30 secondes entre les perturbations

les résultats obtenus en utilisant respectivement un délai de 30 sec., 10 sec. et 5 sec. pour l'adaptation multi-unités. Ces changements n'affectent pas le temps de convergence de l'optimisation multi-unités qui demeure autour de 3 minutes dans tous les cas.

Il faut souligner que les valeurs optimales obtenues dans les expériences des figures 4.15- 4.20 ne doivent pas être comparées à celles des résultats précédents puisque ces expériences ont été effectuées un mois plus tard et qu'entre temps, le système a évolué.

Dans Chioua et al. (2007), il a été démontré qu'une trop grande fréquence de per-

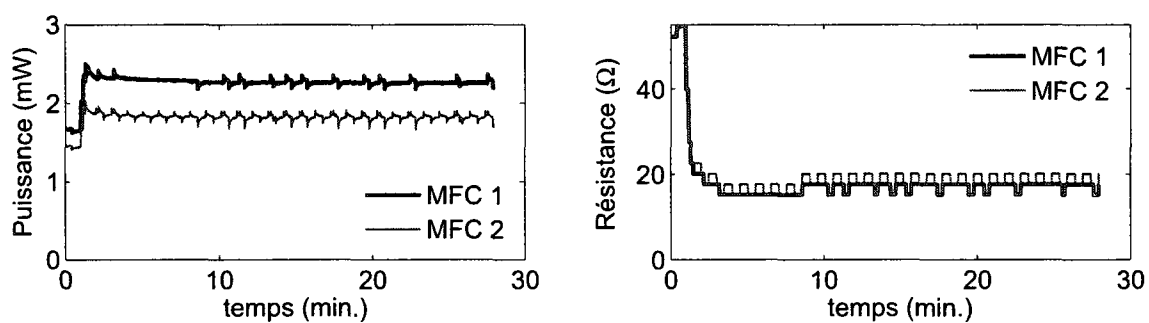


Figure 4.19 Réponse de la méthode multi-unités avec un délai de 10 secondes entre les perturbations

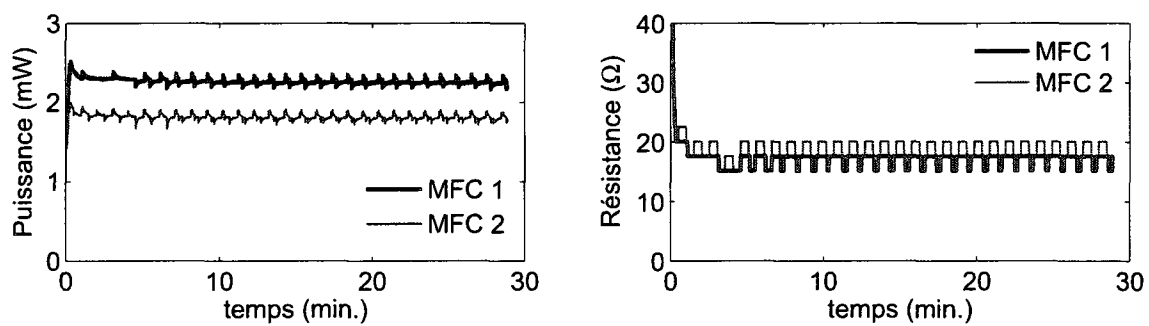


Figure 4.20 Réponse de la méthode multi-unités avec un délai de 5 secondes entre les perturbations

turbations dans la méthode de perturbation/observation introduit une erreur entre le point de convergence du système et le point optimal réel. Ce comportement est reflété dans les résultats du tableau 4.1. Ce tableau contient les valeurs moyennes de convergence des résistances externes des méthodes d'optimisation selon les différents intervalles de temps utilisés.

Tableau 4.1 Valeurs moyennes de convergence des résistances externes

	Perturb./Observ.		Multi-unités	
	$R_1 (\Omega)$	$R_2 (\Omega)$	$R_1 (\Omega)$	$R_2 (\Omega)$
Délai de 30 secondes	15.2	19.7	16.6	17.9
Délai de 10 secondes	13.8	17.1	16.8	18
Délai de 5 secondes	12.3	16.1	17.2	18.4

Il en ressort clairement que dans le cas de la méthode de perturbation/observation, une trop grande fréquence de perturbations amène le système à converger à un point d'opération sous-optimal et engendre également un dépassement dans les courbes de puissance comme illustré à la Figure 4.17. Par contre, le changement de délai dans la méthode d'optimisation multi-unités n'affecte pas la valeur moyenne de convergence quoique dans ce cas, un délai trop court introduit des variations autour de la résistance optimale de la pile 1. Ces variations sont le fruit du changement instantané de R à chaque transition entre la période d'adaptation multi-unités et la période d'adaptation du correcteur $\hat{\gamma}$.

En optimisation en temps réel, le coût de conception étendu permet de quantifier la perte de performance d'un système optimisé par rapport à son optimum idéal (Zhang et J.F.Forbes, 2000, 2006). La perte en performance provient essentiellement de deux sources, soit la perte encourue durant la transitoire (nécessaire pour atteindre l'optimum) et la perte due à la variabilité du point d'équilibre. Les méthodes dites "sans modèle" où le gradient est estimé à partir d'un modèle statique empirique avec perturbation temporelle ont une perte de performance significative associée à la période transitoire qui est plus longue (Yip et Marlin, 2004) . La lente vitesse de

convergence observée pour la méthode de perturbation/observation confirme cette perte en performance. Une augmentation de la fréquence de perturbation ou encore de la valeur de la perturbation peut réduire la perte de performance reliée à la transitoire mais augmentera la perte associée à la variabilité.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, trois différentes méthodes d'optimisation ont été appliquées pour maximiser en temps réel la puissance fournie par deux piles à combustibles microbiennes à travers deux résistances externes variables. Une première série d'expériences ont permis de constater que la méthode d'optimisation multi-unités permettait d'atteindre l'optimum en dépit d'un intervalle entre chaque estimation du gradient inférieur au temps de réponse du système et ce, même lorsque ce dernier présente un comportement dynamique à phase non-minimale. La méthode multi-unités permet également de suivre l'optimum malgré une augmentation de la température dans le compartiment anodique relativement aisément.

Une autre série de résultats a permis de comparer expérimentalement les performances des méthodes de perturbation/observation et du gradient à celles obtenues avec la méthode multi-unités. La convergence de la méthode de perturbation/observation, ainsi que celle de la méthode de multi-unités, n'est pas affectée par les grandes variations de courbure de la fonction objectif alors que la méthode de la plus forte pente ne peut converger pour une des deux unités.

La méthode multi-unités converge plus rapidement vers l'optimum que la méthode de perturbation/observation. Ceci s'explique par le fait que, dans le cas de la méthode multi-unités, les deux piles microbiennes présentent des dynamiques similaires et l'effet transitoire est éliminé lors de l'estimation du gradient par différences finies

permettant une adaptation plus rapide. La même conclusion s'applique quant à la capacité de la méthode multi-unités à suivre correctement l'optimum en présence de perturbation causant un changement rapide et considérable de la puissance électrique sans changer la résistance optimale (comme dans le cas du changement de concentration du substrat). Pour une perturbation plus lente comme l'augmentation de température, les deux méthodes réagissent correctement.

Bien que la méthode d'optimisation multi-unités converge plus rapidement, l'ajustement de ses paramètres est beaucoup plus complexe. De l'information à propos des différences dans les courbes statiques est requise afin de régler correctement cette boucle d'optimisation. Dans certains cas, ce besoin de connaissance *a priori* peut représenter une limite à l'application de la méthode d'optimisation multi-unités. La convergence rapide de la méthode multi-unités est liée à la similarité des unités du procédé, qui ne peut pas toujours être vérifiée. Le réglage de la méthode de perturbation/observation est plus simple mais l'ajustement de la fréquence de perturbations doit être choisie avec soin afin d'éviter la convergence vers un point d'opération sous-optimal (une fréquence trop rapide de perturbations dans la méthode de perturbation/observation introduit une erreur de convergence sur la valeur de résistance obtenue) ou même l'instabilité du système.

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

Conclusions

La première contribution de cette thèse est l'analyse des performances de la méthode d'optimisation multi-unités lorsque appliquée à des procédés possédant des unités semblables mais non identiques. Ainsi, au chapitre 2, nous avons tout d'abord étudié l'effet qu'auront des courbes statiques différentes pour les unités d'un procédé sur le point d'équilibre et sur la stabilité de la méthode multi-unités. Selon l'hypothèse que les courbures des caractéristiques statiques sont les mêmes autour de l'optimum, il a été démontré que la stabilité de la méthode multi-unités peut être assurée par un choix adéquat du paramètre de perturbation constante introduit entre les points d'opération de chacune des unités (Δ). Toutefois, même si la stabilité peut être assurée par ce choix, le système peut converger vers un point d'équilibre loin de l'optimum réel. Afin de compenser cette erreur de convergence, deux correcteurs ont été introduits dans le schéma original de la méthode multi-unités. Deux types d'adaptation ont été proposés. L'adaptation séquentielle nécessite une interruption de l'optimisation multi-unités afin de permettre une mise à jour des correcteurs. L'adaptation simultanée quant à elle permet la mise à jour des correcteurs simultanément à l'évolution du système vers l'optimum. La preuve de stabilité locale de ces deux types de correction a été présentée. Les résultats de simulation ont confirmé que l'utilisation de correcteurs permet d'amener le système à son point optimal réel. Toutefois, la vitesse de convergence du système est ralentie par le temps nécessaire à l'estimation des différences entre les points d'opérations optimaux des unités et les valeurs correspondantes de leur fonction objectif. Le gain en vitesse de convergence de la méthode multi-unités par rapport à celle de la méthode de perturbation dépend de l'importance des différences entre les unités. La méthode d'optimisation

multi-unités peut même converger plus lentement que la méthode de perturbations si les différences entre les courbes statiques des unités sont très significatives.

Le développement d'une méthode de commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives faisant l'objet du chapitre 3 constitue une autre contribution de cette thèse. Le choix de l'ensemble des contraintes actives en temps réel représente le principal défi dans l'utilisation d'une méthode de projection. Il fut démontré que l'adaptation de la méthode de projection traditionnellement utilisée dans la résolution numérique de problèmes d'optimisation dans un contexte continu peut engendrer une boucle infinie dans la logique servant au choix de l'ensemble de contraintes actives. Une logique assurant un choix de contraintes actives menant à une direction de descente projetée faisable a été proposée. De plus, l'ajout d'un terme dans la loi de commande extrémale permet d'assurer le suivi des contraintes actives. La preuve de convergence de la méthode de commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives utilisant cette logique a également été établie. Un exemple de simulation a permis de confirmer qu'utiliser une méthode de commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives plutôt qu'avec fonction barrière résulte en une meilleure valeur de la fonction objectif au point d'équilibre. Ce gain en performance est attribuable à l'atteinte d'un point d'équilibre situé directement sur les contraintes actives lorsqu'une telle méthode est utilisée.

Au chapitre 4, trois différentes méthodes d'optimisation ont été appliquées pour maximiser en temps réel la puissance fournie par deux piles à combustibles microbiennes à travers deux résistances externes variables. Une première série d'expériences a permis de constater que la méthode d'optimisation multi-unités amenait le système à l'optimum en dépit d'un intervalle entre chaque estimation du gradient inférieur au temps de réponse du système et ce, même lorsque ce dernier présente un comportement dynamique à phase non-minimale. D'autres résultats ont

permis de comparer expérimentalement les performances des méthodes de perturbation/observation et du gradient à celles de la méthode multi-unités. La convergence de la méthode de perturbation/observation ainsi que celle de la méthode de multi-unités n'ont pas été affectées par les grandes variations de courbure de la fonction objectif alors que la méthode de la plus forte pente n'a pu converger pour l'unité présentant la plus large variation de courbure.

Ces résultats ont également confirmé que la méthode multi-unités converge plus rapidement vers l'optimum que la méthode de perturbation/observation puisque dans le cas de la méthode multi-unités, les dynamiques similaires des deux piles microbiennes permettent l'élimination de l'effet transitoire lors de l'estimation du gradient par différences finies. Une adaptation plus rapide est alors possible. Cette même raison explique la capacité de la méthode multi-unités à suivre correctement l'optimum en présence de perturbation causant un changement rapide et considérable de la puissance électrique sans changer la résistance optimale (comme dans le cas du changement de concentration du substrat). Pour une perturbation plus lente comme l'augmentation de température, les deux méthodes réagissent correctement.

Recommandations

Suite aux résultats obtenus et présentés dans cette thèse, certains travaux pouvant améliorer les performances de la méthode multi-unités ont été identifiés. Les travaux suggérés portent sur les chapitres de résultats présentés dans cette thèse soit, l'optimisation multi-unités en présence d'unités non identiques, la commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives et l'application de la méthode d'optimisation multi-unités à l'optimisation de la puissance électrique fournie par des piles à combustible microbiennes.

Optimisation multi-unités en présence d'unités non identiques

1. L'analyse de l'effet des différences entre les unités présentée dans cette thèse est limitée à un système à une seule entrée. L'analyse pourrait être répétée pour les systèmes multi-variables. La complexité de l'analyse augmente avec le nombre de variables manipulées : β est une matrice $m \times m$ et γ est un vecteur de longueur m , où m représente le nombre de variables manipulées.
2. Les analyses présentées ne tiennent aucunement compte du bruit de mesure. L'impact du bruit de mesure sur la performance de la méthode mérite de l'attention. Des études préliminaires ont démontré que le bruit de mesure engendre une erreur d'estimation du gradient. Cette erreur peut être éliminée en choisissant une valeur de Δ supérieure à la déviation standard du bruit. Toutefois, une trop grande valeur de ce paramètre signifie une perte de performance de la méthode d'optimisation multi-unités. Une étude stochastique plus approfondie permettrait de caractériser l'erreur d'estimation du gradient et potentiellement de proposer des solutions permettant d'améliorer la performance du schéma multi-unités en présence du bruit de mesure.
3. Les correcteurs présentés au chapitre 2 ont pour but de compenser les différences entre les courbes statiques des unités. Les différences entre les dynamiques des unités quant à elles influencent la stabilité de la méthode multi-unités (Reney, 2008). Or, l'élaboration de correcteurs pour assurer la stabilité de la méthode en présence d'unités dont les dynamiques diffèrent représente une autre extension possible à cet ouvrage.
4. Les effets liés à l'application de la méthode multi-unités à des procédés dont les unités présentent des caractéristiques statiques différentes ont été énoncés dans cette thèse. Les effets découlant de l'application de la méthode à des procédés dont les unités présentent des dynamiques différentes ont fait l'objet d'une étude antérieure (Reney, 2008). L'effet de ces deux types de différences

combinées serait une autre idée de réflexion.

5. Les lois de commande des correcteurs à adaptation simultanée sont fondées sur un modèle quadratique. Or, comme le démontre l'exemple de simulation présenté à la fin du chapitre 2, un tel modèle n'est pas toujours adéquat et il faut alors utiliser des lois de commande qui se rapprochent des lois de commande des correcteurs à adaptation séquentielle. Or, avec ces lois de commande, l'évolution du correcteur $\hat{\beta}$ est couplé à celle du correcteur $\hat{\gamma}$ ce qui ralentit la convergence. Dans de tels cas, il faudrait investiguer la possibilité d'utiliser un autre type de modèle qui permettrait, tout comme le fait le modèle quadratique, de découpler l'évolution de $\hat{\beta}$ de celle de $\hat{\gamma}$ et ainsi permettre une convergence plus rapide de la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée.
6. Si les impacts combinés des différences statiques et dynamiques entre les unités sont clairement identifiés, il serait envisageable de remplacer une unité par un modèle fondamental en utilisant des correcteurs. Toutefois, puisque les correcteurs adaptatifs utilisent une perturbation temporelle il n'est pas clair *a priori* que la méthode multi-unités conserverait son avantage de rapidité de convergence comparativement à la méthode de perturbations. Il faudrait déterminer les limites acceptables du modèle permettant l'application de la méthode.

Commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives

1. La méthode de commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives présentée au chapitre 3 suppose un gradient parfaitement estimé. Or, une erreur d'estimation du gradient peut amener le système à invoquer la logique de choix des contraintes actives à des moments inopportuns. Une étude plus approfondie de l'impact d'une erreur d'estimation du gradient sur la méthode de commande extrémale avec projection du gradient sur les contraintes actives représente une autre piste de réflexion.
2. Un autre aspect qui pourrait être étudié davantage est la méthode de normalisa-

tion utilisée dans la logique de mise à jour de l'ensemble de contraintes actives. Bien que la méthode proposée fonctionne correctement elle pourrait possiblement être simplifiée. Une logique réalisable en un nombre restreint d'itérations est peut-être possible.

3. La méthode multi-unités avec projection du gradient n'a été présentée que pour des unités identiques. L'application de la méthode pour des unités semblables mais non-identiques (tant au niveau des fonctions objectif que des contraintes) mérite d'être étudiée.

Optimisation multi-unités de la puissance délivrée par des piles à combustible microbiennes

1. Pour ce qui est de l'optimisation des piles à combustible microbiennes, l'évaluation des correcteurs pourraient être fait autrement. Les mesures de tension acquises durant l'évolution du système pourraient servir à évaluer la pente des courbes de polarisation de chaque pile. Ces pentes pourraient ensuite être utilisées dans l'ajustement des correcteurs.
2. Dans la pratique courante, l'utilisation de plusieurs piles à combustible dans un même système nécessite que ces piles soient branchées en parallèle et reliées à une seule et unique charge. L'application de la méthode multi-unités à un système composé de piles à combustible microbiennes branchées en parallèle et reliées à la même résistance variable pourrait faire l'objet d'une autre série d'expériences.

BIBLIOGRAPHIE

- Allen, R. et Benetto, H. (1993). Microbial fuel-cells : Electricity production from carbohydrates. *Applied Biochemistry and Biotechnology*, **39**(40), 27–40.
- Alterman, P., Rabaey, K., Pham, H., Bood, N., et Verstraete, W. (2006). Continuous electricity generation at high voltages and currents using stacked microbial fuel cells. *Environmental Science and Technology*, **40**, 3388–3394.
- Alterman, P., Versichele, M., Marzorati, M., Boon, N., et Verstraete, W. (2008). Loading rate and external resistance control the electricity generation of microbial fuel cells with different three-dimensional anodes. *Bioresource Technology*, **99**, 8895–8902.
- Ariyur, K. et Krstic, M. (2003). *Real-time Optimization by Extremum-Seeking Control*. John Wiley and Sons.
- Astrom, K. et Wittenmark, B. (1995). *Adaptive control, 2nd edition*. Addison-Wesley.
- Aucoin, M., McMurray-Beaulieu, V., Poulin, F., Boivin, E., Chen, J., Ardelean, F., Cloutier, M., Choi, Y., Miguez, C., et Jolicoeur, M. (2006). Identifying conditions for inducible protein production in E.coli : Combining fed-batch and multiple induction. *Microbial Cell Factories*, **5**(27), 1–13.
- Bamberger, W. et Isermann, R. (1978). Adaptive on-line steady-state optimization of slow dynamic processes. *Automatica*, **14**(3), 223–230.
- Batstone, D. J., Keller, J., Angelidaki, I., Kalyuzhnyi, S. V., Pavlostathis, S. G., Rozzi, A., Sanders, W. T. M., Siegrist, H., et Vavilin, V. (2002). *Anaerobic Digestion Model no 1 (ADM1)*. IWA Publishing.

- Biegler, L., Grossmann, I., et Westerberg, A. (1985). A note on approximation techniques used for process optimization. *Computers and Chemical Engineering*, **9**(2), 201–206.
- Blackman, P. (1962). *An Exposition of Adaptive Control*, chapter Extremum seeking regulators. J.H. Westcott ed. The Macmillan Company, New York.
- Boico, F. et Lehman, B. (2006). Study of different implementation approaches for a maximum power tracker. *Proceedings of the 2006 IEEE Workshop on Computers in Power Electronics, COMPEL'06*, pages 15–21.
- Boico, F. et Lehman, B. (2007). Single sensor mppt algorithm for multiple solar panels configurations. *PESC Record - IEEE Annual Power Electronics Specialists Conference, PESC 07- IEEE 38th Annual Power Electronics Specialists Conference*, pages 1678–1682.
- Bond, D. R. et Lovley, D. R. (2005). Electricity production by geobacter sulfurreducens attached to electrodes. *Applied and Environmental Microbiology*, **69**(3), 1548–1555.
- Bonvin, D. (1998). Optimal operation of batch reactors - a personal view. *Journal of Process Control*, **8**(5-6), 355–368.
- Brdys, M. et Tatjewski, P. (2005). *Iterative Algorithms for Multilayer Optimizing Control*. Imperial College Press/World Scientific, London/ Singapore.
- Bryson, A. et Ho, Y. (1975). *Applied Optimal Control : Optimization, Estimation, and Control*. Hemisphere Pub. Corp. Washington.
- Chen, C. et Joseph, B. (1987). On-line optimization using a two-phases approach : An application study. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **26**(9), 1924–1930.

- Chen, X., Pike, R., Hertwig, T., et Hopper, J. (1998). Optimal implementation of on-line optimization. *Computers and Chemical Engineering*, **22S**, S435–S442.
- Chioua, M., Srinivasan, B., Guay, M., et Perrier, M. (2007). Dependence of the error in the optimal solution of perturbation-based extremum seeking methods on the excitation frequency. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, **85**(4), 447–453.
- Cutler, C. et Perry, R. (1983). Real time optimization with multivariate control is required to maximize profits. *Computers and Chemical Engineering*, **7**(5), 663–667.
- Dehaan, D. et Guay, M. (2005). Extremum-seeking control of state-constrained nonlinear systems. *Automatica*, **41**(9), 1567–74.
- Desbiens, A. et Shook, A. (2003). IMC-optimization of a direct reduced iron phenomenological simulator. *4th International Conference on Control and Automation*, pages 446–450.
- Dormer, A. et Raynor, S. (1998). Real-time optimization an "alternative" approach. *Hydrocarbon Processing*, **77**(9), 81–89.
- Drakunov, S., Ozguner, U., Dix, P., et Ashrafi, B. (1995). Abs control using optimum search via sliding modes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **3**(1), 79–85.
- Durbeck, R. (1965). *Principles for Simplification of Optimizing Control Models*. Ph.d. thesis, Case Institute of Technology, Cleveland, OH.
- Edgar, T. et Himmelblau, D. (1988). *Optimization of Chemical Processes*. McGraw-Hill.
- Forbes, J., Marlin, T., et MacGregor, J. (1994). Model adequacy requirements for optimization plant operations. *Computers and Chemical Engineering*, **18**(6), 497–510.

- Garcia, C. et Morari, M. (1981). Optimal operation of integrated processing systems - 1. open-loop on-line optimizing control. *AIChE Journal*, **27**(6), 960–968.
- Gil, G., Chang, I. S., Kim, B., Kim, M., Jang, J., Park, H., et H.J., K. (2003). Operational paramters affecting the performance of a mediator-less microbial fuel cell. *Biosensors and Bioelectronics*, **18**, 327–334.
- Gill, P.E., M. W. et Wright, M. (1981). *Practical Optimization*. Academic Press.
- Golden, M. et Ydstie, B. (1989). Adaptive extremum control using approximate process models. *AIChE Journal*, **35**, 1157–1169.
- Grossman, R., Nerode, A., Ravn, A., et Rischel, H. (1993). Hybrid systems. *Lecture notes in Computer Science*, **736**, 474p.
- Guay, M., Dochain, D., et Perrier, M. (2005). Adaptive extremum-seeking control of nonisothermal continuous stirred tank reactors. *Chemical Engineering Science*, **60**(13), 3671–3681.
- Guay, M. et Zhang, T. (2003). Adaptive extremum seeking control of nonlinear dynamic systems with parametric uncertainties. *Automatica*, **39**(7), 1283–93.
- Harrington, E. (1965). The desirability function. *Industrial Quality Control*, **21**, 494–498.
- He, Z. et Angenent, L. (2006). Application of bacterial biocathodes in microbial fuel cells. *Electroanalysis*, **18**(19-20).
- Hua, C. et Shen, C. (1998). Comparative study of peak power tracking techniques for solar storage systems. *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*, pages 679–683.
- Jang, S., Joseph, B., et Mukai, H. (1987). On-line optimization of constrained multivariable chemical processes. *AIChE Journal*, **33**(1), 26–35.

- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- Krstic, M., Kokotovic, P., et Kanellakopoulos, I. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons Inc., New York, NY.
- Krstic, M. et Wang, H.-H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, **36**(4), 595–601.
- Leblanc, M. (1922). Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée. *Revue générale de l'électricité*. Disponible sur <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3128v/f196.table>.
- Leyva, R., Alonso, C.I.Q. and Cid-Pastor, A., et Martinez-Salamero, L. (2006). Mppt of photovoltaic systems using extremum-seeking control. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **42**(1), 249–258.
- Liu, H. et Logan, B. (2004). Electricity generation using an air-cathode single chamber microbial fuel cell in the presence and absence of a proton exchange membrane. *Environmental Science and Technology*, **38**, 4040–4046.
- Logan, B., Call, D., Cheng, S., Hamelers, H., Sleutels, T., Jeremiasse, A. W., et Rozendal, R. (2008). Microbial electrolysis cells for high yield hydrogen gas production from organic matter. *Environmental Science and Technology*, **42**, 8630–8640.
- Logan, B., Hamelers, B., Rozendal, R., Schroder, U., Keller, J., Freguia, S., Aelterman, P., Verstraete, W., et Rabaey, K. (2006). Microbial fuel cells : Methodology and technology. *Environmental Science and Technology*, **43**(5), 1098–1101.
- Logan, B. et Regan, J. (2006). Electricity-producing bacterial communities in microbial fuel cells. *Trends in Microbiology*, **14**, 512–518.
- Marchetti, A., Chachuat, B., et Bonvin, D. (2009). Modifier-adaptation methodology for real-time optimization. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, DOI :10.1021/ie801352x.

- Marlin, T. et Hrymak, A. (1997). Real-time operations optimization of continuous processes. volume 316 of *AIChE Symposium Series*, page 156.
- McFarlane, R. et Bacon, D. (1989). Empirical strategies for open-loop on-line optimization. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, **67**(4), 665–677.
- Nocedal, J. et Wright, S. (1999). *Numerical Optimization*. Springer, New York.
- Ogunnaike, B. A. (1994). *Process Dynamics Modeling and Control*. Oxford University Press., New York.
- Oh, S. et Logan, B. (2007). Voltage reversal during microbial fuel cell stack operation. *Journal of Power Sources*, **167**, 11–17.
- Rabaey, K., Boon, N., Siciliano, S., Verhaege, M., et Verstraete, W. (2004). Biofuel-cells select for microbial consortia that self-mediate electron transfer. *Applied and Environmental Microbiology*, **70**, 5373–5382.
- Rabaey, K., Clauwaert, P., Aelterman, P., et Verstraete, W. (2005). Tubular microbial fuel cells for efficient electricity production. *Environmental Science and Technology*, **39**, 8077–8082.
- Rabaey, K. et Verstraete, W. (2005). Microbial fuel cells : Novel biotechnology for energy generation. *Trends in Biotechnology*, **23**(6), 291–298.
- Reguera, G., McCarthy, K. D., Mehta, T., Nicoll, J. S., Tuominen, M. T., et Lovley, D. R. (2005). Extracellular electron transfer via microbial nanowires. *Nature Biotechnology*, **435**, 1098–1101.
- Reklaitis, G., Ravindran, A., et Ragsdell, K. (1983). *Engineering Optimization Methods and Applications*. John Wiley and Sons, Hoboken, N.J.
- Reney, F. (2008). Etude de la technique d’optimisation multi-unités avec dynamiques différentes. Master’s thesis, Ecole Polytechnique de Montreal, Montreal, Qc.

- Roberts, P. (1979). An algorithm for steady-state system optimization and parameter estimation. *International Journal of Systems Science*, **10**(7), 719–734.
- Roberts, P. et Williams, T. W. C. (1981). On an algorithm for combined system optimisation and parameter estimation. *Automatica*, **17**(1), 199–209.
- Rosen, J. (1960). Gradient projection method for nonlinear programming. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal*, **8**(1), 181–217.
- Siegrist, H., Vogt, D., Garcia-Heras, J. L., et Gujer, W. (2002). Mathematical model for meso- and thermophilic anaerobic sewage sludge digestion. *Environmental Science and Technology*, **36**, 1113–1123.
- Srinivasan, B. (2007). Real-time optimization of dynamic systems using multiple units. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **17**, 1183–1193.
- Sternby, J. (1980). Adaptive control of extremum systems. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, pages 151–160.
- Tartakovsky, B. et Guiot, S. (2006). A comparison of air and hydrogen peroxide oxygenated microal fuel cell reactors. *Biotechnology Progress*, **22**, 241–246.
- Tartakovsky, B., Manuel, M., et Neburchilov, V. (2008). Biocatalyzed hydrogen production in a continuous flow microbial fuel cell with a gas phase cathode. *Journal of Power Sources*, **182**, 291–297.
- Tatjewski, P., Brdys, M., et Duda, J. (2001). Optimizing control of uncertain plants with constrained feedback controlled outputs. *International Journal of Control*, **74**(15), 1510–1526.
- Van De Vusse, J. (1964). Plug flow reactor versus tank reactor. *Chemical Engineering Science*, **19**(12), 994–997.

- Van Wijk, I. et Pope, M. (1992). Advanced process control and on-line optimization in shell refineries. *European Symposium on Computer Aided Process Engineering*, **16S**, S69–S80.
- Vassiliadis, V. S. et Floudas, C. A. (1997). Modified barrier function approach for large-scale optimization. *Computers and Chemical Engineering*, **21**(8), 855–874.
- Vasu, G. (1957). Experiments with optimizing controls applied to rapid control of engine presses with high amplitude noise signals. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, **79**, 481–488.
- Wang, H., Krstic, M., et Bastin, G. (1999). Optimizing bioreactors by extremum seeking. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **13**(8), 651–669.
- Wellstead, P. et Scotson, P. (1990). Self-tuning seeking control. *IEEE Proceedings*, **137**(3), 165–175.
- Wyatt, J. et Chua, L. (1983). Power theorem, with solar application. *IEEE transactions on Circuits and Systems*, **30**, 824–828.
- Xia, W., Dunford, G., et Palmer, R. (2007). Application of centered differentiation and steepest descent to maximum power point tracking. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **54**, 2539–2549.
- Yip, W. et Marlin, T. (2004). The effect of model fidelity on real-time optimization performance. *Computers and Chemical Engineering*, **28**, 267–280.
- Yu, E., Cheng, S., Scott, K., et Logan, B. (2007). Microbial fuel cell performance with non-pt cathode catalysts. *Journal of Power Sources*, **171**, 275–281.
- Zhang, T., Guay, M., et Dochain, D. (2003). Adaptive extremum seeking control of continuous stirred-tank bioreactors. *AIChE Journal*, **49**(1), 113–123.

- Zhang, Y. et J.F.Forbes (2000). Extended design cost : A performance criterion for real-time optimization systems. *Computers and Chemical Engineering*, **24**, 1829–1841.
- Zhang, Y. et J.F.Forbes (2006). Performance analysis of perturbation-based methods for real-time optimization. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, **84**, 209–218.
- Zhang, Y., Monder, D., et Forbes, F. (2002). Real-time optimization under parametric uncertainty : a probability constrained approach. *Journal of Process Control*, **12**(3), 373–389.
- Zhang, Z., Pike, R., et Hertwig, T. (1995). An approach to on-line optimization of chemical plants. *Computers and Chemical Engineering*, **19S**, S305–S310.
- Zhong, Z., Huo, H., Zhu, X., Cao, G., et Ren, Y. (2008). Adaptive maximum power point tracking control of fuel cell power plants. *Journal of Power Sources*, **176**, 259–269.
- Zuo, Y., Cheng, S., Call, D., et Logan, B. (2007). Tubular membrane cathodes for scalable power generation in microbial fuel cells. *Environmental Science and Technology*, **41**, 3347–3353.

ANNEXE I

DESCRIPTION DU MODÈLE DU BIORÉACTEUR UTILISÉ

Le système à l'étude est celui de la production de protéines vert fluorescent à partir de cellules E. Coli (Aucoin et al., 2006). Dans ce procédé, la phase de croissance et la phase de production de protéines sont séparées par une phase d'induction en température. La phase de croissance se fait en mode discontinu à une température de 30°C. Lorsqu'une certaine quantité désirée de cellules est atteinte, la température est augmentée à 42°C pour une période d'une heure pour être ensuite réduite à 30°C. Ce choc en température induit un passage de la phase de croissance vers la phase de production. Habituellement, la phase de production est également faite en mode discontinu mais dans le présent cas, elle est exécutée en mode continu, soit à volume constant.

Le modèle dynamique présenté dans Aucoin et al. (2006) est utilisé pour simuler le procédé réel. Le glucose constitue le substrat limitant. Le modèle est constitué des équations suivantes :

$$\dot{C}_X = \mu C_X - \left(\frac{q}{V}\right) C_X \quad (\text{I.1})$$

$$\dot{C}_P = (Y_{P/X}\mu + \alpha)C_X - \frac{q}{V}C_P \quad (\text{I.2})$$

$$\dot{C}_S = \left(\frac{q}{V}\right)(C_{S_f} - C_S) - \frac{\mu C_X}{Y_{X/S}} - \frac{(Y_{P/X}\mu + \alpha)C_X}{Y_{P/S}} - m_s \left(\frac{C_S}{K_{sm} + C_S}\right) C_X \quad (\text{I.3})$$

avec,

C_X , la concentration de biomasse dans le bioréacteur

q , le débit volumique du substrat alimentant le bioréacteur

μ , le taux de croissance spécifique de la biomasse

V , le volume du mélange dans le bioréacteur

C_S , la concentration de substrat dans le bioréacteur

C_{S_f} , la concentration de substrat dans le courant d'alimentation

C_P , la concentration de protéines (GFP) dans le bioréacteur

$Y_{P/S}$, le coefficient de production de protéines par biomasse

$Y_{X/S}$, le coefficient de production de biomasse par substrat

α , la constante associée à la formation de produit de non-croissance

m_S , le coefficient de maintien

Le modèle de croissance de Monod est utilisé pour l'expression de μ :

$$\mu = \frac{\mu_{max} C_S}{K_s + C_S} \quad (I.4)$$

avec,

μ_{max} , la constante de taux de croissance maximal

K_s , la constante de saturation

Les paramètres du modèle ont été fixés aux valeurs indiquées dans le tableau suivant :

Les valeurs initiales utilisées au chapitre 1 sont présentées dans le tableau qui suit.

Tableau I.1 Valeurs des paramètres du bioréacteur

m_s	0.0025	g S/(g X h)
K_S	0.4	g/L
$Y_{P/X}$	66.92	mg P/g X
C_{S_f}	60	g/L
$Y_{P/S}$	50	mg P/g S
K_{S_m}	0.04	g/L
α	0.1	mg P/(g X h)
V	20	L
μ_{max}	0.925	h^{-1}
$Y_{X/S}$	0.35	gX/gS

Tableau I.2 Paramètres d'ajustement de la méthode des perturbations

ω	0.06	rad/h
a	0.5	L/h
ω_l, ω_h	0.006	rad/h
k	2.25×10^{-6}	$\frac{L^2 mg}{h^2}$

Tableau I.3 Paramètres d'ajustement et valeurs initiales utilisées pour la méthode multi-unités

	Unité 1	Unité 1a	
C_{S_0}	0.24	0.3	g/L
C_{X_0}	14.2	14.19	g/L
C_{P_0}	954.5	953.3	mg/L
q_0	7	8	L/h
k_{mu}	1.23×10^{-4}		$\frac{L^2 mg}{h^2}$
Δ	1		$\frac{L}{h}$

ANNEXE II

EXPANSION EN SÉRIE DE TAYLOR DE $\sqrt{1-X}$

Dans la présente annexe, il est démontré que l'expansion en série de Taylor de $f(x) = \sqrt{1-x}$ mène à :

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} S(x) \quad (\text{II.1})$$

avec $S(x)$ donné par,

$$S(x) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j!}{2^{2j} j! (j+1)!} x^{j-1} \quad (\text{II.2})$$

Les dérivées successives de $f(x)$ sont :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2} \quad (\text{II.3})$$

$$f''(x) = -\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (1-x)^{-3/2} \quad (\text{II.4})$$

$$f'''(x) = -\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) (1-x)^{-5/2} \quad (\text{II.5})$$

$$f^{(4)}(x) = -\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) (1-x)^{-7/2} \quad (\text{II.6})$$

$$f^{(i)}(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{2(i-1)!}{2^{i-1}(i-1)!} \right) \frac{1}{2^{i-1}} (1-x)^{-\frac{(2(i-1)+1)}{2}} \quad (\text{II.7})$$

$$(\text{II.8})$$

L'expansion en série de Taylor de $f(x)$ autour de $x = 0$ mène à :

$$f(x) \approx f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \quad (\text{II.9})$$

$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2(i-1)!}{2^{2(i-1)}(i-1)!i!} x^i \quad (\text{II.10})$$

$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(j)!}{2^{2(j)}(j)!(j+1)!} x^{j-1} \quad (\text{II.11})$$

Ce qui mène finalement à :

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} S(x) \quad (\text{II.12})$$

avec,

$$S(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(j)!}{2^{2(j)}(j)!(j+1)!} x^{j-1} \quad (\text{II.13})$$

ANNEXE III

**VALEURS UTILISÉS POUR SIMULER DEUX UNITÉS
NON-IDENTIQUES**

Les paramètres du modèle de l'unité 2 ont été fixés aux valeurs indiquées dans le tableau suivant :

Tableau III.1 Valeurs des paramètres du bioréacteur 2

m_s	0.0025	g S/(g X h)
K_S	0.4	g/L
$Y_{P/X}$	66.92	mg P/g X
S_f	60	g/L
$Y_{P/S}$	50	mg P/g S
K_{S_m}	0.04	g/L
α	0.1	mg P/(g X h)
V	20	L
μ_{max}	1	h^{-1}
$Y_{X/S}$	0.4	gX/gS

ANNEXE IV

PARAMÈTRES DE RÉGLAGE DE LA MÉTHODE MULTI-UNITÉS AVEC CORRECTEURS POUR L'EXEMPLE DES BIORÉACTEURS

Tableau IV.1 Paramètres d'ajustement de la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation séquentielle

Δ	-1	L/h
k_β	-2.7×10^{-4}	$\frac{L^2}{h^2 mg}$
k_{mu}	1.2×10^{-4}	$\frac{L^2}{h^2 mg}$
k_γ	8.6×10^{-2}	$\frac{1}{h}$
T_1	150	h
T_2	315	h
a	0.5	L/h
ω	0.06	rad/h

Tableau IV.2 Paramètres d'ajustement de la méthode multi-unités avec correcteurs à adaptation simultanée

Δ	-1	L/h
k_β	-4.5×10^{-6}	$\frac{L^2}{h^2 mg}$
k_{mu}	2.25×10^{-5}	$\frac{L^2}{h^2 mg}$
k_γ	1.2×10^{-2}	$\frac{1}{h}$
a	1	L/h
ω	0.06	rad/h
λ	0.017	
$R_{i,j i=j}(0)$	1	
$R_{i,j i \neq j}(0)$	0	

ANNEXE V

DESCRIPTION DU MODÈLE DE RÉACTEUR UTILISÉ

Le modèle utilisé est constitué des équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{c}_A &= \frac{q_a}{V} c_{A_{in}} - \frac{q_a + q_b}{V} c_A - r_1 \\ \dot{c}_B &= \frac{q_b}{V} c_{B_{in}} - \frac{q_a + q_b}{V} c_B - r_1 - r_2 \\ \dot{c}_C &= -\frac{q_a + q_b}{V} c_C + r_1 \\ r_1 &= k_1 c_A c_B, \quad r_2 = 2k_2 c_B^2 \\ W &= r_1(-\Delta H_1)V + r_2(-\Delta H_2)V\end{aligned}$$

avec,

c_X , la concentration de l'espèce X

q_A , le débit d'entrée de l'espèce A dans le réacteur

q_B , le débit d'entrée de l'espèce B dans le réacteur

k_i , les constantes de vitesse

r_i , les vitesses de réaction

$(-\Delta H_i)$, les enthalpies des deux réactions

W , la chaleur produite par les réactions

V , le volume du réacteur

Les valeurs numériques utilisées pour la simulation sont présentées au tableau suivant :

Tableau V.1 Valeurs des paramètres et des conditions initiales

k_1	1.5	L mol/h	$(-\Delta H_1)$	7×10^4	J/mol
k_2	0.014	L mol/h	$(-\Delta H_2)$	5×10^4	J/mol
V	500	L	$c_{A_{in}}$	2	mol/L
W_{max}	10^6	J/h	$c_{B_{in}}$	1.5	mol/L
q_{max}	22	L/h	c_{A_0}	0.085	mol/L
q_{a_0}	7	L/h	c_{B_0}	0.195	mol/L
q_{b_0}	11	L/h	c_{C_0}	0.692	mol/L

Note : c_{A_0} , c_{B_0} , c_{C_0} , q_{a_0} et q_{b_0} sont les valeurs initiales en régime permanent du système.

ANNEXE VI

DESCRIPTION DES MATÉRIAUX ET MÉTHODES UTILISÉS POUR LE MONTAGE DES MFC

Conception, instrumentation et opération de la pile à combustible microbienne

Le volume de chaque chambre anodique était de 100 mL. L'anode était constitué un tissu de graphite de 5 mm d'épaisseur mesurant 10 X 5 cm (GFA5, Speer Canada, Kitchener, ON, Canada) alors que la cathode consistait en un électrode de diffusion de gaz de 10 X 5 cm avec une charge de platine de 0.5 mg cm^{-2} (GDE LT 120EW, E-TEK Division, PEMEAS Fuel Cell Technologies, Somerset, NJ, USA). Une distance de 1.5 cm sépare l'anode de la cathode. Les piles ont été inoculées avec 5 mL de dépôts anaérobiques homogènes (Lassonde Industries Inc, Rougemont, QC, Canada). Elles étaient alimentées par une solution contenant du carbone à l'aide d'une pompe d'infusion (modèle PHD 2000, Harvard Apparatus, Canada) à un débit variant de 2.5 à 5 mL/jour, ce qui correspond à une concentration d'acétate en entrée de 700 à 1400 mg/L. 1 mL d'une solution de trace de métaux à été ajouté à 1 L d'eau de dilution. L'eau de dilution était introduite avec un débit de 146 mL/jour à l'aide d'une pompe péristatique (Cole-Parmer, Chicago, IL, USA) assurant ainsi un temps de rétention de 10 h. Une autre pompe péristatique était utilisée pour le liquide de recirculation à un débit de 0.57 L/h dans la boucle de recirculation externe. Une plaque chauffante de 5 x 10 cm juxtaposée à la chambre anodique de chaque pile, un thermocouple placé dans la chambre anodique ainsi qu'un contrôleur de température (modèle JCR-33A, Shinko Technos Co. Ltd. Osaka, Japon) permettait de maintenir la température des piles à une valeur prédéterminée MFC. Pour chacune

des piles, 4 potentiomètres digitaux (modèle X9C102 d'Intersil, Milpitas, CA, USA) connectés en parallèle permettaient une variation de la charge externe allant de 9 à 252 ohms. La lecture du voltage aux bornes de chaque pile ainsi que la commande des potentiomètres digitaux se faisait via une carte d'acquisition de données et de commande (Labjack U12, Labjack Corp, Lakewood, CO, USA).

Composition du Media et mesures analytiques

La composition de la solution contenant du carbone et celle contenant des traces de métaux est détaillée dans les tableaux VI.1 et VI.2 respectivement.

Tableau VI.1 Composition de la solution de carbone

Composante	Concentration en g/L
acétate	40.0
extrait de levure	6.7
NH_4Cl	18.7
KCl	148.1
K_2HPO_4	64.0
KH_2PO_4	40.7

Tableau VI.2 Composition de la solution de traces de métaux

Composante	Concentration en mg/L
$FeCl_2 - 4H_2O$	2000
H_3BO_3	50
$ZnCl_2$	50
$CuCl_2$	30
$MnCl_2 - 4H_2O$	500
$(NH_4)_6MO_7O_{24} - 4H_2O$	50
$AlCl_3$	50
$CoCl_2 - 6H_2O$	50
$NiCl_2$	50
EDTA	500
HCl	1 (ml)

Toutes les solutions ont été filtrées, stérilisées et maintenues à une température de 4°C jusqu'à utilisation. Les solutions furent préparées avec de l'eau distillée, et les

produits chimiques et réactants utilisés étaient de qualité analytique. La concentration d'acétate fut déterminée à l'aide d'un chromatographe en phase gazeuse (Sigma 2000, Perkin-Elmer, Norwalk, Connecticut, USA) muni d'une tube de verre d'identification de 91 cm x 4 mm rempli de 60/80 Carbopack C/0.3% Carbopack 20 NH_3PO_4 (Supelco, Mississauga, Ontario, Canada). Plus de détails sur les méthodes analytiques sont fournies dans Tartakovsky et Guiot (2006).